

Formelsammlung

Zusammenfassung der Vorlesung Mathematische Methoden für
Naturwissenschaftler

Prof. Dr. Andreas Heuer
Dr. Oliver Rubner
Stefan F. Hopp

Münster 2008

Literatur

- ZACHMANN, H.G.: Mathematik für Chemiker. VCH 1994 (5. Auflage).
 - PAPULA, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 1-3, vieweg 2001.
 - HAINZL, J.: Mathematik für Naturwissenschaftler, Teubner 1985.
 - LEHN, J., WEGMANN, H.: Einführung in die Statistik, Teubner 2004.
-

Zahlen

Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen \mathbb{N} : 1, 2, 3, ...

Ganze Zahlen \mathbb{Z} : ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

Rationale Zahlen \mathbb{Q} : ..., $-\frac{1}{2}$, ..., $-\frac{2}{5}$, ..., $\frac{3}{2}$, ...

Reelle Zahlen \mathbb{R} : ..., $-\sqrt{2}$, ..., π , ..., e , ...

Komplexe Zahlen \mathbb{C} : ..., $-2 + 3i$, ..., $1 + 2i$, ...

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wichtige Kurzschreibweisen

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 4 + \dots + n^2$$

$$\prod_{j=1}^n j^2 = 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n^2$$

$i \in \mathbb{N}$: i ist eine natürliche Zahl

$|a|$: absoluter Betrag einer Zahl a

$[a, b]$: Intervall mit der Eigenschaft $a \leq c \leq b$ für $c \in \mathbb{R}$

$(a, b) =]a, b[$: Intervall mit der Eigenschaft $a < c < b$ für $c \in \mathbb{R}$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufbau einer komplexen Zahl: $z = a + bi$ mit imaginärer Einheit $i = \sqrt{-1}$ (also: $i^2 = -1$)

$a = \operatorname{Re}(z)$ (Realteil), $b = \operatorname{Im}(z)$ (Imaginärteil)

Komplex konjugierte Zahl: $z^* = a - bi$

Betrag: $|a + bi| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplikation: $(a + bi) \cdot (c - di) = ac + bd + (bc - ad)i$

Umformung eines Bruchs: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$

Kombinatorik

Mathematische Hilfsmittel

$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \equiv n!$ (*n Fakultät*) Dabei gilt: $0! = 1$ und $(n + 1)! = (n + 1)n!$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n - k)! k!}$

Möglichkeiten der Anordnung von Elementen und deren Berechnung

- Permutationen: Anordnung von n Elementen, Reihenfolge wesentlich: $P_n = n!$
- Kombinationen: Anordnung von k Elementen aus n Elementen, Reihenfolge unwesentlich
- Variationen: Anordnung von k Elementen aus n Elementen, Reihenfolge wesentlich

Art der Anordnungen	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Kombinationen	$K_{oW}(n, k) = \binom{n}{k}$	$K_{mW}(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}$
Variationen	$V_{oW}(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$	$V_{mW}(n, k) = n^k$

Verallgemeinerte Uminterpretation der Kombination ohne Wdh.: n Elemente, die in r Gruppen der Stärke n_i eingeteilt werden, mit $\sum_{i=1}^r n_i = n \Rightarrow P_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ ($r = 2$ für $K_{oW}(n, k)$)

Binomischer Lehrsatz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Unendliche Folgen und Reihen

Unendliche Folgen

Definition: unendliche Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit den Gliedern a_n ($n = (0), 1, 2, 3, \dots$) mit $a_n \in \mathbb{R}$

Eigenschaften von Folgen: Beschränktheit ($|a_n| < A$), Monotonie ($a_{n+1} \leq a_n$ (monoton fallend) oder $a_{n+1} \geq a_n$ (monoton wachsend)), jew. für alle a_n

Definition des Grenzwerts u einer Folge: $u = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Monotoniesatz: Eine Folge, die beschränkt und monoton ist, konvergiert (Konvergenzkriterium).

Definition der Eulerschen Zahl e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Unendliche Reihen

Allgemeines

Bekannte Reihen:

Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Formale Behandlung von Reihen mittels Teilsummen a_i : $a_i = \sum_{n=0}^i u_n$

\Rightarrow Konvergenz von unendlichen Reihen mittels $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ auf Konvergenz von Folgen zurückzuführen

Für die geometrische Reihe ergibt sich ($x \neq 1$): $a_i = \frac{1 - x^{i+1}}{1 - x}$

Für $\lim_{i \rightarrow \infty}$ gilt:

- $|x| < 1$: Konvergenz gegen 0 $\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \frac{1}{1 - x}$
- $|x| \geq 1$: Divergenz

\Rightarrow Allgemein: Konvergenz für $|x| < r$ mit Konvergenzradius r .

Konvergenzkriterien

a. Vergleich mit Integralen

Allgemein: Vergleich einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mit dem vergleichbaren Integral $\int_1^{\infty} dx g(x)$

1. $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n| < \int_1^{\infty} dx g(x) \Rightarrow$ Integral: Majorante
 $\int_1^{\infty} dx g(x)$ konvergiert \Rightarrow Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
2. $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n| > \int_1^{\infty} dx g(x) \Rightarrow$ Integral: Minorante
 $\int_1^{\infty} dx g(x)$ divergiert \Rightarrow Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

b. Quotientenkriterium

$$\text{Allgemein: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k$$

$k < 1$: Konvergenz; $k > 1$: Divergenz; $k = 1$: keine allgemeine Aussage möglich

Funktionen

Allgemeines

Definition: Eine Funktion ist eine Vorschrift, durch die jedem Element einer Menge *eindeutig* ein Element einer anderen Menge zugeordnet wird.

Wichtige Begriffe: Definitionsbereich \mathbb{D} , Wertebereich \mathbb{W} , Periode a , Symmetrie (gerade, ungerade), Stetigkeit, Umkehrfunktion ($y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$, d.h. $f^{-1}(y) = x$)

Algebraische Funktionen, quadratische Gleichung

Allgemeine Formulierung: Polynom vom Grade n : $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

\Rightarrow algebraische Gleichung durch Nullsetzen dieses Ausdrucks (\rightarrow Bestimmung von Nullstellen)

Produktdarstellung: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$

\Rightarrow **Hauptsatz der Algebra**: Jedes Polynom n -ten Grades hat bei Nullsetzen n Lösungen α_i , wenn man komplexwertige Lösungen mitrechnet und eventuell mehrfache Lösungen einzeln zählt.

Bestimmung sämtlicher Nullstellen mittels Polynomdivision

Spezialfall: Quadratische Gleichung $y = ax^2 + bx + c$

\rightarrow Scheitelpunktsform: $y = a(x - d)^2 + e$ mit Scheitelpunkt $S(d|e)$

Wichtig: Nullstellen von $y = x^2 + px + q$: $\alpha_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Gebrochen rationale Funktion

Allgemein: Quotient zweier algebraischer Funktionen

Charakterisierungsmerkmale: Nullstellen (Zähler = 0), Pole (Nenner = 0), Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Polynomdivision

Beispiel: $(x^3 - 4x^2 + 4x) : (x^2 - 1) = x - 4 + \frac{5x - 4}{x^2 - 1}$

Partialbruchzerlegung

Bedingung: Grad der Zählerfunktion kleiner als Grad der Nennerfunktion, $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Darstellung: $f(x) = \frac{ax + b}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} = \frac{A_1(x - \alpha_2) + A_2(x - \alpha_1)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}$

Exponentialfunktion

Allgemeiner Ausdruck: $y = a^x$

Wichtige Spezialfälle: $y = 10^x$ und $y = e^x \equiv \exp(x)$

Potenz-Rechenregeln:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Wichtige Anwendungen:

- Radioaktiver Zerfall: $y(t) = y_0 e^{-kt}$
- Gaußverteilung: $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$
- „ δ -Funktion“: Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$ bezogen auf normierte Gaußfunktion
Eigenschaften: Fläche = 1; $\delta(0) = \infty$; $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)$

Logarithmusfunktion

$x = a^y \Rightarrow y = {}^a \log x$ (Umkehrfunktion)

Wichtige Spezialfälle: $y = {}^{10} \log x = \lg x$ (dekad. Log.) und $y = {}^e \log x = \ln x$ (natürl. Log.)

Logarithmus-Rechenregeln (hier für ln):

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v \qquad \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v \qquad \ln u^b = b \cdot \ln u$$

Trigonometrische Funktionen

Zentrale Funktionen: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

Definition über Einheitskreis, Angabe von x in Bogenmaß mit $x = \frac{\pi}{180^\circ} \varphi$

\Rightarrow Periodizität der Funktionen

Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

Wichtige Relationen:

$$\cos(x) = \sin(\pi/2 - x) \qquad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Spezielle Werte:

$x(\varphi)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	0
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\rightarrow \pm\infty$

Additionstheoreme:

- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \rightarrow \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \rightarrow \sin 2u = 2 \sin u \cos u$

Daraus folgt:

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u) \qquad \sin(u + v) - \sin u = 2 \cos(u + \frac{v}{2}) \sin(\frac{v}{2})$$

Wichtige Näherung: $\sin x \approx x$ für kleine x

Abgeleitete Funktionen:

- Inverse Funktionen: $\sin \rightarrow \arcsin$ etc.
- Hyperbelfunktionen: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Differentialrechnung

Das Differential

Definition: $f'(x_0) = y'(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Falls diese Ableitung für jeden Wert von x_0 existiert, so nennt man die Funktion differenzierbar.

Es gilt: Differenzierbarkeit \Rightarrow Stetigkeit (Umkehrung gilt nicht)

Differentiation spezieller Funktionen

$$\begin{array}{lll} y = c \Rightarrow y' = 0 & y = x^n \ (n \in \mathbb{R}) \Rightarrow y' = nx^{n-1} & y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \\ y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x & y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x & \end{array}$$

Allgemeine Regeln für das Differenzieren

- Summenregel: $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
- Produktregel: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ (Spezialfall: $y = cu$ ($c = \text{const}$) $\Rightarrow y' = cu'$)
- Quotientenregel: $y = u/v \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Zusammengesetzte Funktion: $y = f(\varphi(x)) \Rightarrow y' = f'(\varphi(x)) \varphi'(x)$
Merkregel: Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Umkehrfunktion von $x = f(y)$: $y = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(\varphi(x))}$

Mehrfache Ableitung möglich: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ (n-te Ableitung von f)

Monotonie- und Krümmungsverhalten

Monotonieverhalten

	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) \leq 0$ oder $f'(x) \geq 0$
Verhalten	streng monoton fallend	streng monoton wachsend	monoton fallend/wachsend

Krümmungsverhalten

	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
Verhalten	Rechtskrümmung (konkav)	Linkskrümmung (konvex)

Bestimmung von Extrema und Wendepunkten

Extrema

	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$
$f'(x) = 0$	Maximum	Minimum	keine Aussage möglich*

*Verhalten hängt von höheren Ableitungen ab

Wendepunkte

	$f'''(x) \neq 0$	$f'''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0 \wedge f'(x) = 0$
$f''(x) = 0$	Wendepunkt	keine Aussage möglich*	Sattelpunkt

*Verhalten hängt von höheren Ableitungen ab

Kurvendiskussion

Wichtige zu bestimmende Parameter:

Definitions- und Wertebereich	Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$	Polstellen ($f(x)_{x \rightarrow x_0} = \pm\infty$)
Symmetrie (gerade/ungerade)	Nullstellen ($f(x) = 0$)	Extrema/Wendepunkte

Entwicklung von Funktionen

Lineare Entwicklung

Darstellung einer Funktion in der Nähe von $x_0 = 0$ durch Gerade:

$$f(x) \approx \tilde{f}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{vgl. Tangentengleichung})$$

$$\Rightarrow \Delta f = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Wichtige Beispiele ($x_0 = 0, |\delta| \ll 1$):

$$\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \frac{\delta}{2}$$

$$1/(1-\delta) \approx 1 + \delta$$

$$\sin \delta \approx \delta$$

$$e^\delta \approx 1 + \delta$$

$$\ln(1+\delta) \approx \delta$$

Satz von L'Hospital

Anwendbar für Funktionen $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, für die an der Stelle x_0 gilt: $g(x_0) = h(x_0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x_0)}{h'(x_0)}$$

Taylor-Reihe

Prinzip: Erweiterung der linearen Entwicklung durch Terme höherer Potenzen

$$\Rightarrow \tilde{f}_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{f}_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Unter allgemeinen Bedingungen gilt: $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $|x| < r$ (r : Konvergenzradius von $\tilde{f}(x)$)

Wichtige Beispiele:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\Rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

\Rightarrow Nur für $|x| < 1$ konvergent

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Euler-Formel

Mittels der Taylor-Reihe erhält man: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Analog: $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Daraus resultierende Beziehungen:

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$$

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \text{ (Potenzgesetz)}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$\Rightarrow e^{ix}$ liegt auf Einheitskreis mit Bogenmaß x .

Analog: Darstellung von re^{ix} in der komplexen Ebene

Partielle Ableitungen

Ausgangspunkt: Funktionen mehrerer Variablen $f(x_1, \dots, x_n)$

Prinzip: Nach einer Variable ableiten, alle anderen konstant halten

Partielle Ableitung von f nach x (nach y analog): $\partial_x f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$

Satz von Schwarz: $\partial_y \partial_x f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_x \partial_y f$

Entwicklung einer Funktion in höheren Dimensionen

Beschreibung von $f(x, y)$ am Ort (x_0, y_0) durch Tangentialebene:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\Rightarrow \Delta f \approx \partial_x f(x_0, y_0)\Delta x + \partial_y f(x_0, y_0)\Delta y$$

Kurzschreibweise für $x \rightarrow x_0$ und $y \rightarrow y_0$: $df = \partial_x f dx + \partial_y f dy$

Lineare Regression

Ausgangspunkt: N Messwerte (x_i, y_i) mit funktionalem Zusammenhang $y = ax + b$

\Rightarrow Bestimmung von a und b durch Minimierung von $\sum_i (y_i - y(x_i, a, b, \dots))^2$

Man erhält: $a = \frac{\sum_i x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - N \bar{x}^2}$ und $b = \bar{y} - a \bar{x}$, wobei $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}$ (analog \bar{y})

Vektoren und Vektoranalysis

Definition von Vektoren

Vektor: gekennzeichnet durch eine Richtung und eine Länge (im Gegensatz zum Skalar)

⇒ je nach Dimension Charakterisierung durch zwei bzw. drei kartesische Koordinaten

Betrag a : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Alternativ: Charakterisierung durch Betrag a und durch Winkel (ein Winkel φ in 2D und zwei Winkel ϑ, φ in 3D)

⇒ Umrechnungsformeln:

- Polarkoordinaten (2D): $a_x = a \cos \varphi, a_y = a \sin \varphi$
- Kugelkoordinaten (3D): $a_x = a \sin \vartheta \cos \varphi, a_y = a \sin \vartheta \sin \varphi, a_z = a \cos \vartheta$

Rechenregeln

Addition

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ mit $a_x + b_x = c_x$ etc. (Subtraktion analog)

Multiplikation mit Skalar

$m \cdot \vec{a} = \vec{c}$ mit $m \cdot a_x = c_x$ etc.

Einheitsvektoren

Allgemeine Definition: Vektoren der Länge 1 ⇒ \vec{a} auf Länge 1 normieren: $\hat{a} = \vec{a}/a$

Wichtig: Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

⇒ alle Vektoren darstellbar über diese Einheitsvektoren: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$.

Multiplikation zweier Vektoren

Skalares Produkt

Allgemeine Definition: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi$ mit dem von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossenen Winkel φ

Mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ erhält man: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Vektoriell Produkt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Eigenschaft: \vec{c} steht senkrecht auf \vec{a} und $\vec{b} \Rightarrow$ 3-Finger-Regel der rechten Hand

Betrag von \vec{c} : $c = ab \sin \varphi$ mit dem von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossenen Winkel φ

Interpretation des Betrages: Fläche des durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms

Skalarfelder und Vektorfelder

Definition eines Feldes: Jedem Punkt im Raum (oder in der Fläche) wird ein Skalar oder ein Vektor zugeordnet.

Einführung des Gradienten:

$$\text{grad } u(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y, z) \\ \partial_y u(x, y, z) \\ \partial_z u(x, y, z) \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Aus einem Skalarfeld entsteht ein (konservatives) Vektorfeld.

Interpretation von $\text{grad } u(x, y, z)$: $\text{grad } u(x, y, z)$ steht senkrecht auf den Höhenlinien und zeigt in Richtung der größten Steigung.

$|\text{grad } u(x, y, z)|$: Änderung von $u(x, y, z)$ entlang der Richtung des Gradienten.

Wichtiges Beispiel: Potential $U(x, y, z)$, Kraftfeld $\vec{F}(x, y, z) \Rightarrow \vec{F} = -\text{grad } U$

Andere Schreibweise mit Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad } U = \nabla U$

Divergenz

Definition der Divergenz: $\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \vec{a} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z$

Betrachte Teilchenstrom $\vec{j}(x, y)$ in 2D-Box mit Fläche ΔA und Fluss $F = -\operatorname{div} \vec{j}(x, y, t) \Delta A$

\Rightarrow Kontinuitätsgleichung in 2D: $\partial_t c(x, y, t) = F/\Delta A = -\operatorname{div} \vec{j}(x, y, t)$

Interpretation: Vorliegen von Quellen ($\operatorname{div} \vec{a} > 0$) oder Senken ($\operatorname{div} \vec{a} < 0$) in einem Vektorfeld

Wichtige Anwendung in der Elektrodynamik: Maxwell-Beziehungen

- $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow$ keine magnetischen Monopole (\vec{B} : magn. Feld)
- $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0 \Rightarrow$ Ladung als Quelle des elektr. Feldes (\vec{E} : elektr. Feld, ϵ_0 : Permittivität)

Weitere wichtige Beziehung: $\vec{E} = -\operatorname{grad} U \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$

Einführung des Laplace-Operators: $\Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$

Außerdem gilt:

2D ($\vec{r} = (x, y)^T, r = \sqrt{x^2 + y^2}$)	3D ($\vec{r} = (x, y, z)^T, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)
$\operatorname{grad} g(r) = g'(r) \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right)^T = \frac{\vec{r}}{r} g'(r)$	$\operatorname{grad} g(r) = g'(r) \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right)^T = \frac{\vec{r}}{r} g'(r)$
$\Delta g(r) = \frac{g'(r)}{r} + g''(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r g'(r))$	$\Delta g(r) = 2 \frac{g'(r)}{r} + g''(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 g'(r))$

Rotation

Definition der Rotation:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{pmatrix} \partial a_z / \partial y - \partial a_y / \partial z \\ \partial a_x / \partial z - \partial a_z / \partial x \\ \partial a_y / \partial x - \partial a_x / \partial y \end{pmatrix}$$

Alternative Schreibweise: $\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$.

Interpretation: $\operatorname{rot} \vec{a}$ ist Maß für lokale Wirbelstärke

Anwendung: Maxwell-Beziehungen

- $\operatorname{rot} \vec{B} \propto \vec{j}$ (\vec{j} : elektr. Strom)
- $\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow$ keine Wirbelströme

Integralrechnung

Bestimmtes Integral

Ziel: Berechnung der Fläche $\varphi(a, b)$ zwischen Kurve einer Funktion $y = f(x)$ und x-Achse im Intervall $[a, b]$.

Definition des bestimmten Integrals: $\varphi(a, b) \equiv \int_a^b dx f(x)$

\Rightarrow Negativer Flächenbeitrag, falls $f(x) < 0$

Wichtige Relationen:

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x) \qquad \int_b^a dx f(x) = - \int_a^b dx f(x)$$

Stammfunktion

Funktion $F(x)$ ist Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn gilt $F'(x) = f(x) \Rightarrow$ Umkehrung des Differentiationsprozesses

Wichtig: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion, so ist auch die Funktion $F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstanten C eine Stammfunktion.

\Rightarrow Unbestimmtes Integral: $\boxed{\int dx f(x) = F(x) + C}$

Elementare Stammfunktionen:

$$\int dx x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int dx e^{kx} = \frac{1}{k} e^{kx} + C \qquad \int dx \frac{1}{kx} = \frac{1}{k} \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int dx \sin kx = -\frac{1}{k} \cos kx + C \qquad \int dx \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

Berechnung des bestimmten Integrals mittels Stammfunktion

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\boxed{\int_a^b du f(u) = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b}$

Spezialfall: Grenzen $\pm\infty \Rightarrow$ *uneigentliches Integral*, falls Grenzwert existiert

\rightarrow Wichtiges uneigentliches Integral: $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$

Vereinfachung von Integralen mit Hilfe von Symmetrieargumenten

$f(x)$ ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^a dx f(x) = 0$

$f(x)$ gerade $\Rightarrow \int_{-a}^a dx f(x) = 2 \int_0^a dx f(x)$

Integrationsverfahren

Summen- und Produktregel

$$\int dx (f(x) + g(x)) = F(x) + G(x) \qquad \int dx af(x) = a F(x)$$

Partialbruchzerlegung

Anwendbar bei Integralen von gebrochen rationalen Funktionen (s.o.)

$$\int dx \frac{ax + b}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \int dx \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \int dx \frac{A_2}{x - \alpha_2} = A_1 \ln |x - \alpha_1| + A_2 \ln |x - \alpha_2|$$

Partielle Integration

$$\int_a^b dx u(x) v'(x) = u(x) v(x)|_a^b - \int_a^b dx u'(x) v(x)$$

Substitution

$$\text{Substitution: } u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx = g'(g^{-1}(u))dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{g'(g^{-1}(u))}$$

Grenzen ersetzen: $a \rightarrow g(a)$ und $b \rightarrow g(b)$

Gut anwendbar bei Integralen des Typs $\int_a^b dx f(g(x))g'(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b dx f(g(x))g'(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} du f(u) = F(u)|_{g(a)}^{g(b)}$$

Abbildung von Integralen auf Summen und umgekehrt

Sehnentrapezregel: $\int_a^b dx f(x) \approx \int_a^b dx \tilde{f}(x) = h \sum_{k=0}^N f(x_k) - \frac{1}{2}h[f(x_0) + f(x_N)]$ mit $h = (b - a)/N$; $x_0 = a, x_N = b$.

Umformung ergibt Ausdruck zur Berechnung von Summen mittels Integralen:

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) = \frac{1}{h} \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_N)]$$

Anwendung: Approximation der Fakultät (Stirlingsche Formel)

$$\Rightarrow \ln N! \approx N(\ln N - 1) + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

2D-Bereichsintegrale

Definition: $\int_B dA H(x, y)$

Interpretation: Volumen zwischen dem Bereich B auf der xy-Ebene und der Fläche $z = H(x, y)$

Berechnung durch sukzessive Ausführung von zwei 1D-Integralen

$$\Rightarrow \int_B dA H(x, y) = \int_a^b dx \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} dy H(x, y)$$

Variablentransformation in höheren Dimensionen

Problem bei 2D-Bereichsintegralen: x-abhängige Grenzen bei Integration nach y

Vereinfachende Transformation in Polarkoordinaten möglich, wenn B Kreis (Radius a):

$$x \in [-a, a], y \in [-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}] \rightarrow r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi] \text{ mit } dx dy = r dr d\varphi$$

$$\text{Integration: } V = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy H(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr H^*(\varphi, r) (= \pi a^2 H, \text{ falls } H \text{ konstant})$$

Transformation in Kugelkoordinaten: $dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$

Rotationskörper

Bedingung: $H(x, y) = f(r)$

$$\Rightarrow \text{Volumen des entstehenden Rotationskörpers: } V = \int_B dA f(r) = 2\pi \int_0^a dr r f(r)$$

Anwendung: Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2/2)$

$$\text{Es gilt: } \int_B dA \exp(-r^2/2) = 2\pi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ und } \int_B dA \exp(-r^2/2) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2/2) \right]^2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2/2) = \sqrt{2\pi}$$

Differentiale

Das vollständige Differential

$df = g(x, y) dx + h(x, y) dy$ ist vollständiges Differential, wenn gilt:

$$\partial_y g(x, y) = \partial_y \partial_x f(x, y) = \partial_x \partial_y f(x, y) = \partial_x h(x, y)$$

Dann gilt außerdem: $\partial_x f(x, y) = g(x, y)$ und $\partial_y f(x, y) = h(x, y)$

Interpretation: Bewegung auf der Tangentialebene einer unterliegenden Funktion $f(x, y)$ (*Zustands- oder Potentialfunktion*)

Anwendung in der PC:

$U(T, V)$ ist Zustandsfunktion, $dU = \delta Q + \delta A$ ist kein vollständiges Differential

$\Rightarrow Q(T, V)$ ist keine Zustandsgröße

$(\delta Q)/T$ bildet jedoch vollständiges Differential dS

$\Rightarrow S(T, V)$ beschreibt Entropie des Systems und ist eindeutige Zustandsfunktion

Wegintegration

Allgemein: Kurvenintegral über ein vollständiges Differential hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve, nicht aber vom Integrationsweg ab.

\Rightarrow Integration über geschlossene Kurve ergibt den Wert 0.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Allgemein: $y' = f(x, y)$: Gewöhnliche DGL 1. Ordnung

Im Folgenden Betrachtung des spezielleren Falles $y' = -f(x)h(y) + g(x)$ mit der Unterscheidung

$g(x) = 0$: homogene DGL

$g(x) \neq 0$: inhomogene DGL

Lösung der homogenen DGL

Vorgehensweise am Beispiel $y' = -f(x)y^2$ (allg.: $h(y) \neq 0$)

- Trennung der Variablen: $\frac{dy}{y^2} = -f(x) dx$

- Aufintegration: $\int \frac{dy}{y^2} = - \int dx f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{F(x) - C}$

- Anfangsbedingung: $y(0) = \frac{1}{F(0) - C} \Rightarrow C$

Lösung der linearen inhomogenen DGL

Allgemeine Form: $\Rightarrow y' + f(x)y = g(x)$ (also: $h(y) = y$ und $g(x) \neq 0$)

- Lösungsschema: 1.) Bestimmung der Lösung der homogenen DGL $y_{hom}(C, x)$
 2.) Variation der Konstanten $C \Rightarrow y(x) = y_{hom}(C = u(x), x)$

Gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten

Betrachte: $a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$

Lösung mittels Exponentialansatz (hom. Fall)

- 1. Ordnung: $y' - ky = 0$

Exponentialansatz: $y(t) = b e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha = k$

- 2. Ordnung: $a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$

Mit obigem Exponentialansatz: $a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0 \Rightarrow 2$ Lösungen $\alpha_{1,2}$

$\Rightarrow y_1(t) = b_1 e^{\alpha_1 t}$ und $y_2 = b_2 e^{\alpha_2 t}$ mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$

\Rightarrow Allgemeinste Lösung: $y(t) = b_1 e^{\alpha_1 t} + b_2 e^{\alpha_2 t}$

Beachte: Zur Bestimmung von b_1 und b_2 zwei Anfangsbedingungen notwendig!

Wichtige Anwendung: Gedämpfte Schwingung in einem harmonischen Potential $\frac{1}{2} D y^2$:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F = -Dy - \rho \frac{dy}{dt} + f(t) \text{ (Rückstell-, Reibungs- und äußere Kraft)}$$

Homogene Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{D}{m} y = 0 \text{ (} f(t) = 0 \text{)}$$

$$\text{Exponentialansatz ergibt: } \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}$$

$$\Rightarrow y(t) = b_1 e^{\alpha_1 t} + b_2 e^{\alpha_2 t} \text{ mit den zwei Anfangsbedingungen } y(0), \frac{dy(0)}{dt} = v(0)$$

- Fall I: $\rho = 0$, Definition: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow y(t) = y(0) \cos(\omega t) + \left(\frac{v(0)}{\omega}\right) \sin(\omega t)$
- Fall II: $\rho \neq 0$, Definitionen: $\omega_\rho = \sqrt{\left|\frac{\rho^2}{4m^2} - \frac{D}{m}\right|}$, $k = \frac{\rho}{2m}$

Fallunterscheidung:

$\rho^2/4m^2 < D/m$	$\rho^2/4m^2 > D/m$
komplexes α , also $\alpha_{1,2} = -k \pm i\omega_\rho$	reelles α , also $\alpha_{1,2} = -k \pm \omega_\rho$
$y(t) = e^{-kt}(b_1 e^{i\omega_\rho t} + b_2 e^{-i\omega_\rho t})$	$y(t) = e^{-kt}(b_1 e^{\omega_\rho t} + b_2 e^{-\omega_\rho t})$
Schwingfall (Pendel in Luft)	Kriechfall (Pendel in Honig)

Inhomogene Schwingungsgleichung

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \rho \frac{dy}{dt} + Dy = f(t) \text{ mit } f(t) = K_0 \cos(\omega_k t)$$

Lösung: $y(t) = \frac{K_0}{r} \cos(\omega_k t - \Psi)$ (allein relevant für lange Zeiten (nach Einschwingzeit)),

wobei $r = \sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \rho^2 \omega_k^2}$ und $\tan \Psi = \frac{\rho \omega_k}{m(\omega^2 - \omega_k^2)}$

Es gilt: $\rho = 0 \Rightarrow r \rightarrow 0$, $\Psi = \pi/2 \Rightarrow$ Resonanzkatastrophe für $\omega_k = \omega$.

Fouriertransformation

Fourierdarstellung periodischer Funktionen

Betrachte eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode $2l$.

Ansatz: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/l}$

Ziel: Bestimmung der c_n (Fourierkoeffizienten, Amplituden der unterliegenden Frequenz ω_n)

$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dt e^{-in\pi t/l} f(t)$ (bei $2l$ -periodischen Funktionen gültig für alle t)

Alternative Formulierung in reeller Schreibweise (mit $c_n^* = c_{-n}$):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi t/l) + b_n \sin(n\pi t/l)]$$

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dt f(t) \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dt \cos(n\pi t/l) f(t) \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dt \sin(n\pi t/l) f(t)$$

Vereinfachung durch Symmetrieüberlegungen:

$$f(t) \text{ gerade} \Rightarrow b_n = 0 \text{ und } \int_{-l}^l \rightarrow 2 \int_0^l \qquad f(t) \text{ ungerade} \Rightarrow a_n = 0 \text{ und } \int_{-l}^l \rightarrow 2 \int_0^l$$

Herleitung von Formeln zur Beschreibung von π aus bestimmten Fouriersummen möglich

Falls $f(t)$ unstetig bei $t = t_0$ gilt für die Fourierreihe $f_{FT}(t) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(t_0 - \epsilon) + f(t_0 + \epsilon))$

Fourierintegral

Übergang von Fourierreihe zu Fourierintegral für Grenzfall $l \rightarrow \infty$ (diskretes $\omega_n \rightarrow$ kontin. ω):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

mit der Fouriertransformierten von $f(t)$:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t)$$

Zu beachten:

- Formale Identität von räumlichem Variablenpaar (x, k) und zeitlichem Paar (t, ω)
- Keine Einheitlichkeit bezüglich der Vorzeichen in den e-Funktionen und der Vorfaktoren

Laplace-Transformation: $g(\lambda) = \int_0^{\infty} dt f(t) \exp(-\lambda t)$ (formal ähnlich)

Wichtige Eigenschaft der Fourier- und der Laplacetransformation:

$$\mathcal{F}(f(x) * g(x)) = 2\pi \mathcal{F}(f(x)) \mathcal{F}(g(x))$$

(Definition der Faltung: $f(x) * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) g(x - \xi)$)

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wesentliche Eigenschaften einer W'keitsverteilung p mit der Ereignismenge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$:

- $p(\omega_i) > 0$: Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis ω_i vorkommt.
- $\sum_{i=1}^N p(\omega_i) = 1$
- p ist definiert für jede Menge von Ereignissen: z.B. $p(\omega_1 \vee \omega_2) = p(\omega_1) + p(\omega_2)$

Elementare Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Laplace-Verteilung
Alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich: $p_i = 1/N$, wenn Ω aus N Elementen besteht.
- Binomialverteilung
Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ergebnissen: T (Treffer), M (Misserfolg), wobei $p(T) = p$ und $p(M) = 1 - p$

Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei n -maliger Durchführung des Experiments:

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{vgl. Binomischer Lehrsatz})$$

- Poisson-Verteilung
Binomial-Verteilung sehr kleinem p und sehr großem n (\Rightarrow Ereignis sehr unwahrscheinlich)
Für diesen Grenzfall gilt (mit $\lambda = pn$ als mittlerer Anzahl von Treffern):

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Zufallsgrößen

Definition: Jedem $\omega_i \in \Omega$ wird eine reelle Zahl $x_i = X(\omega_i)$ zugeordnet.

Charakterisierung der Verteilung der Zufallsgröße

Wichtige Kenngrößen einer Verteilung $p(X)$:

- Verteilungsfunktion $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$.
- Mittelwert $\mu \equiv \langle X \rangle = \sum_{i=1}^M p(x_i) x_i$
 - Binomialverteilung: $\mu = np$
 - Poissonverteilung: $\mu = \lambda$

- Varianz $\sigma^2 = \langle (X - \mu)^2 \rangle = \sum_{i=1}^M p(x_i)(x_i - \mu)^2$ (gewichtetes Mittel der quadr. Abweichungen)
Standardabweichung σ : direktes Maß für Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilung
 - Binomialverteilung: $\sigma^2 = np(1 - p)$
 - Poissonverteilung: $\sigma^2 = \lambda$ (entspricht Grenzfall $p \rightarrow 0$ für obigen Ausdruck)

Allgemein gilt für die Verteilung der Mittelwerte bei Vormittelung über n Zufallsgrößen:

$$\mu_n = \mu \text{ und } \sigma_n^2 = \sigma^2/n$$

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kennzeichen: Zufallsgröße besitzt zufällig beliebige, reelle Werte zwischen zwei Größen a und b

Wichtig: $p(x_0)$ nicht bestimmbar (x_0 beliebige reelle Zahl)

\Rightarrow Mittels sog. Wahrscheinlichkeitsdichte kann $p(c \leq X \leq d) = p([c, d])$ berechnet werden.

Eigenschaften:

$$f(x) > 0 \text{ für alle } a \leq x \leq b \quad \int_a^b f(x)dx = 1 \quad p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$$

Kenngrößen:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \mu = \int_a^b xf(x)dx \quad \sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx$$

Wichtige Beispiele:

- Gleichverteilung: $f(x) = 1/(b - a) \Rightarrow F(x) = (x - a)/(b - a)$
- Exponentialverteilung: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; a = 0, b = \infty$
- Gaußsche Normalverteilung: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; a = -\infty, b = \infty, \mu = 0, \sigma^2 = 1$

Zwei Möglichkeiten, eine Wahrscheinlichkeit γ anzugeben:

$$- \gamma = p(x < c_\gamma) = F_{0,1}(c_\gamma)$$

$\gamma \equiv F_{0,1}(c_\gamma)$	0.5	0.9	0.95	0.975	0.841	0.977	0.999
c_γ (Quantile)	0	1.28	1.65	1.96	1	2	3

$$- \gamma = p(|x| < u_\gamma) = 2F_{0,1}(u_\gamma) - 1$$

γ	0.682	0.90	0.95	0.99	0.954	0.998
u_γ	1	1.65	1.96	2.58	2	3

- Allg. Gaußverteilung: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

Wichtig zur Berechnung von γ : $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ist gaußverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.

\Rightarrow Mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = p(|x - \mu|/\sigma < u_\gamma)$ gilt $x \in [\mu - \sigma u_\gamma, \mu + \sigma u_\gamma]$

Zentraler Grenzwertsatz

Ausgangspunkt: X_1, \dots, X_n unabh. Zufallsvariablen mit derselben Verteilungsfunktion mit μ, σ^2 .

Für große n gilt: Verteilung der Mittelwerte \bar{X}_n mit μ_n und σ_n^2 ist in guter Näherung gaußverteilt.

\Rightarrow Variable $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_n}$ normalverteilt

\Rightarrow Binomial- und Poissonverteilung gehen für große n in Gaußverteilung über.

Allg. Formulierung: Messgröße, die sich aus vielen unabhängigen Effekten zusammensetzt, kann durch normalverteilte Zufallsvariable meist angemessen beschrieben werden.

Statistische Analyse von Messdaten

Ausgangspunkt: Endlicher Satz von Messdaten (Stichprobe)

Ziel der Analyse:

1. **Abschätzung** von Eigenschaften der unterliegenden Verteilungen (insbes. μ und σ^2)
2. Bestimmung der **Glaubwürdigkeit**, dass gewisse Aussagen über die unterliegende Verteilung falsch oder richtig sind

Abschätzung der unterliegenden Parameter

Ziel: Abschätzung des Mittelwertes und der Varianz der unterliegenden Verteilung zu den Messwerten x_1, \dots, x_n

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{Varianz } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

\Rightarrow Für $n \rightarrow \infty$ gilt: $\bar{x} = \mu$ und $s^2 = \sigma^2$

Bei sehr vielen Stichproben erhält man: $\langle \bar{x} \rangle = \mu$ und $\langle s^2 \rangle = \sigma^2$ (erwartungstreue Schätzer)

Konfidenzintervalle

Ziel: Aussagen über die zu erwartende Genauigkeit von μ

\Rightarrow Bestimmung von Konfidenzintervallen $[X_{min}(\gamma), X_{max}(\gamma)]$ (bzw. der Varianz von μ)

Intuitive Erkenntnisse:

- Je größer die Zahl der Stichprobenwerte n , desto *kleiner* die Breite des Konfidenzintervalls.
- Je größer γ , desto *größer* die Breite des Konfidenzintervalls.

Wichtige Erkenntnis: $f(\mu|\bar{X}) = f(\bar{X}|\mu)$ (\Rightarrow Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$\Rightarrow \mu$ ist wahrscheinlichster Wert der Verteilung $f(\bar{X})$ und umgekehrt, Varianzen sind gleich

Für $f(\bar{X})$ gilt:

- \bar{X} ist gaußverteilt (zentraler Grenzwertsatz)
- Zufallsvariable $(\bar{X} - \mu)/\sigma_n$ ist normalverteilt (bei gegebenem μ und mit $\sigma_n^2 \approx s^2/n$)
 \Rightarrow ebenso Zufallsvariable $Y = (\mu - \bar{X})/\sigma_n$ (bei gegebenem \bar{X})

\Rightarrow Mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = p(|Y| < u_\gamma)$ gilt: $\mu \in [\bar{X} - u_\gamma\sigma_n, \bar{X} + u_\gamma\sigma_n]$

Konfidenzintervall: $X_{max} - X_{min} = 2u_\gamma\sigma_n$

Hinweis: $\mu = \bar{X} \pm \Delta X$ bedeutet: $u_\gamma = 1$ und somit $\gamma = 0.68$.

Testen von Parametern

Gaußtest

Frage: Welche Auswirkung hat die Veränderung eines bestimmten Parameters in einem Experiment

\Rightarrow Unterscheidung zwischen den Hypothesen $H_0: \mu_{neu} = \mu$ und $H_1: \mu_{neu} \neq \mu$.

Definition des Fehlers 1. Art: Entscheidung für H_1 , obwohl H_0 richtig ist

\Rightarrow Test der normierten Testgröße $T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma_n} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < u_\gamma \Leftrightarrow$ Akzeptanz

(Wichtige Annahme: Varianz der Verteilung ist bekannt und ändert sich nach Modifizierung des Experiments nicht)