# Komplexe Zahlen

3

Teil I

Wie kann man komplexe Zahlen beschreiben?

Wie rechnet man mit komplexen Zahlen?

Was sind komplexe Zeiger?

Welche Eigenschaften haben komplexe Polynome?




L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_3

Komplexe Zahlen werden in der Mathematik motiviert als eine Erweiterung der reellen Zahlen, in der auch bisher unlösbare Polynomgleichungen eine Lösung haben. In Anwendungen, in denen mit sinusförmigen Größen gearbeitet wird, erleichtern komplexe Zahlen die Umformungen und Rechnungen.

In diesem Kapitel führen wir die komplexen Zahlen ein. Wir erläutern die verschiedenen Darstellungsformen für komplexe Zahlen und erklären, wie man mit ihnen rechnet. Als wichtige Anwendung erklären wir, wie Schwingungen mithilfe von Zeigern und komplexen Zahlen dargestellt werden. Danach betrachten wir Polynome mit komplexem Argument und diskutieren ihre grundlegenden Eigenschaften.

## 3.1 Grundbegriffe und die kartesische Form

Zu Beginn von Kap. 1 haben wir in einem kurzen Abriss dargestellt, dass wir die rationalen Zahlen brauchen, um alle Grundrechenarten ausführen zu können, ohne dass man ein Ergebnis erhält, das nicht mehr im Zahlenbereich ist. Um auch alle Wurzeln aus positiven Zahlen (und andere irrationale Zahlen) zur Verfügung zu haben, mussten wir den Zahlenbereich nochmals erweitern auf die reellen Zahlen. Beim Lösen von Polynomgleichungen, beispielsweise quadratischen Gleichungen, kann es aber dennoch vorkommen, dass eine Gleichung keine reelle Lösung hat.

Beim Versuch, die quadratische Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

zu lösen, erhält man

$$x^2 = -1.$$

Sucht man reelle Lösungen, so ist diese Gleichung unlösbar, da Quadrate von reellen Zahlen immer größer oder gleich 0 sind.

### Im Komplexen besitzt jede quadratische Gleichung eine Lösung

Durch die Einführung einer neuen Zahl i mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ wird diese Gleichung lösbar:

$$x_{1,2} = \pm\mathrm{i}$$

sind die gesuchten Zahlen mit der Eigenschaft $x^2 = -1$. Die Zahl i nennt man die **imaginäre Einheit**.

Sucht man nach Lösungen von

$$x^2 + 9 = 0$$

bzw. $x^2 = -9$, erhalten wir unter Verwendung der oben neu definierten Zahl i die Lösungen $x_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}$, denn es gilt

$$(\pm 3\mathrm{i})^2 = 9\mathrm{i}^2 = -9.$$

Reelle Vielfache der imaginären Einheit i nennt man **imaginäre Zahlen**.

Für die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

erhält man mit der $p$-$q$-Formel (1.1) formal

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9}.$$

Die Gleichung ist reell nicht lösbar, da der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist. Mit $\sqrt{-9} = \sqrt{9\mathrm{i}^2} = 3\mathrm{i}$ ergibt sich als Lösung der quadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = 1 \pm 3\mathrm{i}.$$

Eine Zahl, die als Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl zusammengesetzt ist, nennt man **komplexe Zahl** in kartesischer Darstellung.

### Realteil und Imaginärteil sind die Bausteine einer komplexen Zahl

**Definition**

Die Zahlen

$$z = a + b \cdot \mathrm{i}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen **komplexe Zahlen in kartesischer Darstellung**. i bezeichnet die **imaginäre Einheit**, definiert durch $\mathrm{i}^2 = -1$.

Zwei komplexe Zahlen heißen **gleich**, wenn Real- und Imaginärteil übereinstimmen.

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Man nennt $a = \mathrm{Re}(z)$ den **Realteil** von $z$ und $b = \mathrm{Im}(z)$ den **Imaginärteil** von $z$.

Ist bei $z = a + b\mathrm{i}$ der Imaginärteil $b = 0$, dann ist $z \in \mathbb{R}$, d. h., die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen.

**Achtung** Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind reelle Zahlen. ◀

In Mathematik und Informatik wird die imaginäre Einheit mit i bezeichnet. Die Bezeichnung der imaginären Einheit mit j ist üblich in den Ingenieurwissenschaften, um eine Verwechslung mit $i$, dem Formelzeichen für den elektrischen Strom, auszuschließen.

Die Beziehung $\mathrm{i}^2 = -1$ kann verwendet werden, um Ausdrücke zu vereinfachen.

Es ist beispielsweise $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = (-1) \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

### Was die Zahlengerade für $\mathbb{R}$ ist, ist die gaußsche Zahlenebene für $\mathbb{C}$

Die reellen Zahlen können auf der Zahlengeraden eingetragen werden (Abschn. 1.3). So können die Lage der Zahlen zueinander und Größer-/Kleinerbeziehungen anschaulich dargestellt werden.

Für die grafische Darstellung komplexer Zahlen verwendet man die **gaußsche Zahlenebene**, die von *Carl Friedrich Gauß* (1777–1855) um 1811 eingeführt wurde.

**Gaußsche Zahlenebene**

Komplexe Zahlen kann man in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch darstellen, indem man auf der horizontalen Achse den Real- und auf der vertikalen Achse den Imaginärteil einträgt (Abb. 3.1).

Die Zahlen $z_1 = 5 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$, $z_3 = -2 - 2\mathrm{i}$ und $z_4 = -3\mathrm{i}$ werden wie in Abb. 3.2 in der komplexen Zahlenebene eingetragen.

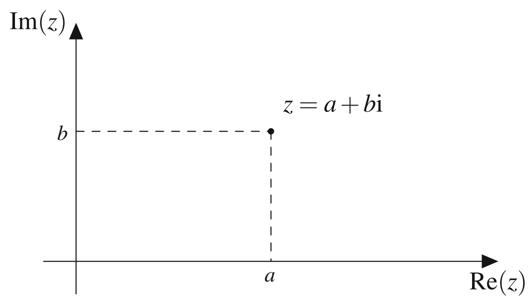


**Abb. 3.1** Komplexe Zahlen werden in der Gaußschen Zahlenebene grafisch dargestellt, indem man auf der horizontalen Achse den Real- und auf der vertikalen Achse den Imaginärteil einträgt

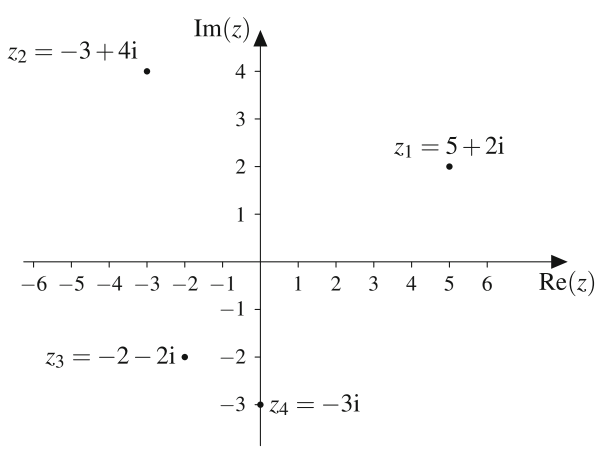


**Abb. 3.2** Die komplexen Zahlen $z_1 = 5+2\mathrm{i}$, $z_2 = -3+4\mathrm{i}$, $z_3 = -2-2\mathrm{i}$ und $z_4 = -3\mathrm{i}$ in der komplexen Ebene

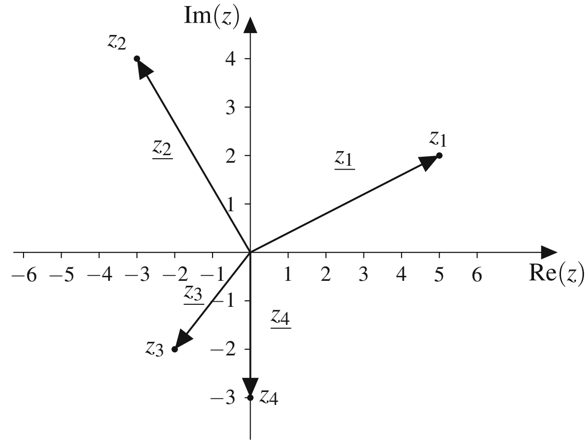


**Abb. 3.3** Die komplexen Zahlen $z_1 = 5+2\mathrm{i}$, $z_2 = -3+4\mathrm{i}$, $z_3 = -2-2\mathrm{i}$ und $z_4 = -3\mathrm{i}$ sowie die zugehörigen Zeiger $\underline{z_1}$, $\underline{z_2}$, $\underline{z_3}$ und $\underline{z_4}$ in der komplexen Ebene

**Achtung** Im Gegensatz zu den bisher bekannten Zahlenmengen gibt es *keine* Größer-/Kleinerbeziehung zwischen komplexen Zahlen. ◀

Eine komplexe Zahl $z$ selbst ist ein Punkt in der Zahlenebene. Oft verwendet man den zur Zahl gehörenden **komplexen Zeiger**, einen Pfeil vom Ursprung der Zahlenebene zur komplexen Zahl. Der komplexe Zeiger zur Zahl $z$ wird mit $\underline{z}$ bezeichnet.

Die Zeiger der komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$, $z_3 = -2 - 2\mathrm{i}$ und $z_4 = -3\mathrm{i}$ werden wie in Abb. 3.3 in der komplexen Zahlenebene eingetragen.

## 3.2 Rechnen in kartesischer Darstellung

### Durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht die konjugiert komplexe Zahl

**Definition**

Die **konjugiert komplexe Zahl** $\overline{z}$ zur komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ist definiert als

$$\overline{z} := a - b\mathrm{i},$$

d. h., das Vorzeichen des Imaginärteils wurde geändert. In der Gaußschen Zahlenebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse (Abb. 3.4).

Manchmal wird die konjugiert komplexe Zahl auch mit $z^*$ bezeichnet.

Teil I

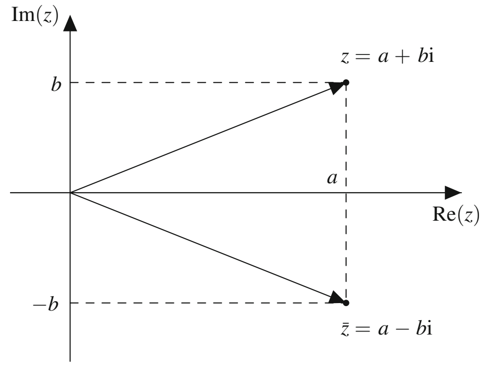


**Abb. 3.4** Die zu $z$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ entspricht in der komplexen Ebene der Spiegelung von $z$ an der reellen Achse

Für $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{(\overline{z})} = z$
4. Ist eine Zahl gleich ihrer konjugiert komplexen Zahl, d. h. gilt $\overline{z} = z$, dann ist $z$ reell, also $\text{Im}(z) = 0$.

**Beispiel**

Die jeweilige konjugiert komplexe Zahl lautet:

1. $z = -7 + \text{i}$: $\overline{z} = -7 - \text{i}$
2. $z = 6 - 5\text{i}$: $\overline{z} = 6 + 5\text{i}$
3. $z = 6$: $\overline{z} = 6$; hier gibt es keinen Imaginärteil, eine reelle Zahl hat den Imaginärteil 0
4. $z = \text{i}$: $\overline{z} = -\text{i}$ ◀

## In der kartesischen Darstellung kann man mit $\text{i}^2 = -1$ wie gewohnt rechnen

Wir beschreiben nun die Grundrechenarten, d. h. die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, für komplexe Zahlen in kartesischer Darstellung.

**Addition und Subtraktion komplexer Zahlen**

Die komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\text{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\text{i}$ in kartesischer Darstellung werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Real- und die Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\text{i}.$$

**Beispiel**

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -1 - 8\text{i}$ und $z_2 = -2 - 3\text{i}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (-1 - 8\text{i}) + (-2 - 3\text{i}) \\ &= -1 - 8\text{i} - 2 - 3\text{i} = -3 - 11\text{i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (-1 - 8\text{i}) - (-2 - 3\text{i}) \\ &= -1 - 8\text{i} + 2 + 3\text{i} = 1 - 5\text{i}. \end{aligned}$$ ◀

Grafisch entspricht die Addition komplexer Zahlen der vektoriellen Addition der Zeiger.

**Multiplikation komplexer Zahlen**

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Klammern ausmultipliziert und mithilfe von $\text{i}^2 = -1$ vereinfacht. Damit ergibt sich für die komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\text{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\text{i}$ in kartesischer Darstellung:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\text{i}.$$

**Beispiel**

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -1 - 8\text{i}$ und $z_2 = -2 - 3\text{i}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (-1 - 8\text{i}) \cdot (-2 - 3\text{i}) \\ &= 2 + 3\text{i} + 16\text{i} + 24\text{i}^2 \\ &= 2 - 24 + 19\text{i} = -22 + 19\text{i}, \\ (z_1)^2 &= (-1 - 8\text{i})^2 \\ &= 1 + 16\text{i} + 64\text{i}^2 \\ &= -63 + 16\text{i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_1} &= (-1 - 8\text{i}) \cdot (-1 + 8\text{i}) \\ &= 1 - 64\text{i}^2 = 65. \end{aligned}$$ ◀

## Der Betrag einer komplexen Zahl ergibt sich mit Pythagoras

Für jede komplexe Zahl $z = a + b\text{i}$ ist

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

und damit eine nichtnegative reelle Zahl.

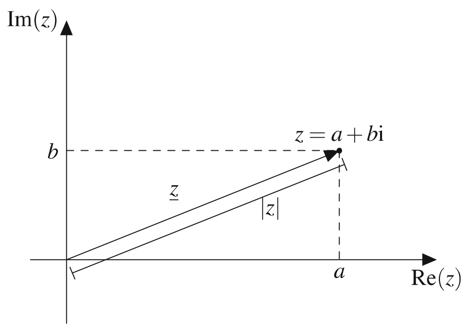


**Abb. 3.5** Der Betrag einer komplexen Zahl ist der Abstand der Zahl zum Ursprung. Dies entspricht der Länge des komplexen Zeigers

Nach dem Satz von Pythagoras ist $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$ die Länge des Zeigers von $z = a + b\mathrm{i}$:

**Definition**

Den Abstand einer komplexen Zahl $z$ zum Ursprung nennt man **komplexen Betrag** von $z$ (Abb. 3.5). Er wird mit $|z|$ bezeichnet. Für $z = a + b\mathrm{i}$ ist

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{z\cdot\overline{z}}.\end{aligned}$$

Das Rechnen mit Beträgen komplexer Zahlen betrachten wir etwas später.

## Beim Dividieren erweitert man mit dem konjugiert komplexen Nenner

Bei der Division komplexer Zahlen steht zunächst eine komplexe Zahl im Nenner. Diesen Nenner muss man reell machen. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass für jede komplexe Zahl $z$ das Produkt $z\cdot\overline{z}$ eine reelle Zahl darstellt.

**Division komplexer Zahlen**

Für die Division der komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, $z_2 \neq 0$, in kartesischer Darstellung ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2+b_2^2}.$$

Zur Berechnung von $\frac{z_1}{z_2}$ in kartesischer Darstellung erweitert man den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners.

**Beispiel**

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -1-8\mathrm{i}$ und $z_2 = -2-3\mathrm{i}$.

In $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-8\mathrm{i}}{-2-3\mathrm{i}}$ stört das i im Nenner, wenn man eine kartesische Darstellung des Quotienten haben will. Man erweitert deshalb den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{-1-8\mathrm{i}}{-2-3\mathrm{i}} = \frac{-1-8\mathrm{i}}{-2-3\mathrm{i}}\cdot\frac{-2+3\mathrm{i}}{-2+3\mathrm{i}}\\ &= \frac{2-3\mathrm{i}+16\mathrm{i}-24\mathrm{i}^2}{4-9\mathrm{i}^2} = \frac{26+13\mathrm{i}}{13} = 2+\mathrm{i}.\end{aligned}$$ ◀

Es ist nicht erforderlich, die Rechenregeln für die Grundrechenarten auswendig zu lernen. Man rechnet mit komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung unter Beachtung der üblichen Rechenregeln für geklammerte Ausdrücke und berücksichtigt $\mathrm{i}^2 = -1$.

Damit kann man wie gewohnt Ausdrücke vereinfachen und Gleichungen lösen.

**Beispiel**

Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{3+2\mathrm{i}} + \frac{1}{4-3\mathrm{i}}.$$

Um nach $z$ auflösen zu können, muss zuerst die rechte Seite auf einen Bruchstrich geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{2}{3+2\mathrm{i}} + \frac{1}{4-3\mathrm{i}} = \frac{2(4-3\mathrm{i})+(3+2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})\cdot(4-3\mathrm{i})}\\ &= \frac{8-6\mathrm{i}+3+2\mathrm{i}}{12-9\mathrm{i}+8\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2} = \frac{11-4\mathrm{i}}{18-\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}z &= \frac{18-\mathrm{i}}{11-4\mathrm{i}} = \frac{18-\mathrm{i}}{11-4\mathrm{i}}\cdot\frac{11+4\mathrm{i}}{11+4\mathrm{i}}\\ &= \frac{198+4+61\mathrm{i}}{121+16} = \frac{202}{137} + \frac{61}{137}\mathrm{i}.\end{aligned}$$ ◀

## Eine komplexe Gleichung führt zu zwei reellen Gleichungen

**Beispiel**

Wir berechnen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 = -8 + 6\mathrm{i}.$$

Mit dem Ansatz $z = x + yi$ suchen wir die Lösung in kartesischer Form. Die binomische Formel liefert

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

und der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten ergibt das reelle Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = -8 \text{ und } 2xy = 6.$$

Durch die zweite Gleichung können wir eine Variable eliminieren: Mit $y = \frac{3}{x}$ folgt $x^2 - \frac{9}{x^2} = -8$. Substitution von $u := x^2$ (beachte $u \geq 0$) liefert

$$u - \frac{9}{u} = -8,$$

und Multiplikation mit $u \neq 0$ liefert die quadratische Gleichung

$$u^2 + 8u - 9 = 0$$

mit den Lösungen

$$u_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 9} = -4 \pm 5.$$

Wegen $u \geq 0$ bleibt nur die Lösung $u = 1$ übrig, und es folgt $x^2 = 1$, also $x_{1,2} = \pm 1$ mit zugehörigen

$$y_{1,2} = \frac{3}{x_{1,2}} = \pm 3.$$

Wir erhalten zwei komplexe Lösungen:

$$z_1 = 1 + 3i \text{ und } z_2 = -(1 + 3i).$$ ◀

Eine komplexe Gleichung führt zu zwei reellen Gleichungen. In kartesischer Darstellung ist dies eine Gleichung für den Realteil und eine für den Imaginärteil.

## 3.3 Die Polarform komplexer Zahlen

Dieselbe komplexe Zahl kann man auf verschiedene Arten ausdrücken: in kartesischer Form, in trigonometrischer oder Polarform und in Exponentialform.

Die kartesische Darstellung einer komplexen Zahl beinhaltet Zahlenwerte für Real- und Imaginärteil. Derselbe Punkt in der Zahlenebene und damit dieselbe komplexe Zahl kann genauso durch die Angabe des Betrags und des Winkels zur positiven reellen Achse dargestellt werden. Dann spricht man von der **Polarform** der komplexen Zahl.

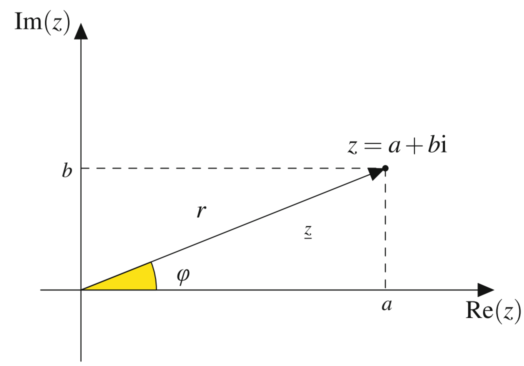


**Abb. 3.6** Jede komplexe Zahl kann man auch durch Angabe von Betrag und Winkel beschreiben

### Bei der Polarform betrachtet man Radius und Winkel

Aus Abb. 3.6 liest man ab, dass für den Winkel $\varphi$ zwischen reeller Achse und dem zur komplexen Zahl $z \neq 0$ gehörenden Zeiger

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r}, \qquad \sin(\varphi) = \frac{b}{r}$$

und damit

$$a = r \cdot \cos(\varphi), \qquad b = r \cdot \sin(\varphi)$$

gilt. Dabei ist $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag der komplexen Zahl. Weiter ist

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0. \tag{3.1}$$

Der Winkel $\varphi$ wird **Argument** der komplexen Zahl genannt.

**Trigonometrische oder Polarform einer komplexen Zahl**

Wird eine komplexe Zahl durch die Angabe des Betrags $r$ und des Winkels $\varphi$ im Bogenmaß in der komplexen Zahlenebene beschrieben, so spricht man von der **trigonometrischen- oder Polarform** (Abb. 3.6). Die komplexe Zahl lautet dann

$$z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Das Argument einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig bestimmt. Man kann $2\pi$ oder Vielfache davon addieren, ohne dass sich die Lage des komplexen Zeigers und damit die komplexe Zahl ändert. Üblicherweise wählt man das Argument so, dass $-\pi < \varphi \leq \pi$ oder $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt.

Um das Argument einer komplexen Zahl nach der aus (3.1) abgeleiteten Formel $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$ zu berechnen, ist eine Fallunterscheidung nötig, je nachdem, in welchem Quadranten sich die betrachtete komplexe Zahl befindet.

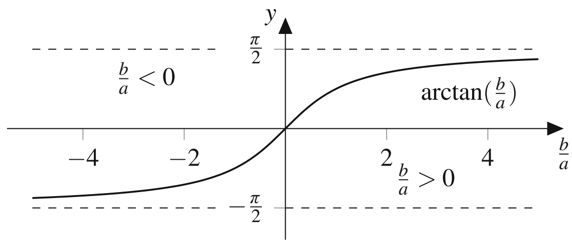


**Abb. 3.7** Die Funktion $y = \arctan(\frac{b}{a})$. Für positive $\frac{b}{a}$ nimmt die Funktion positive Werte an, für negative $\frac{b}{a}$ nimmt sie negative Werte an

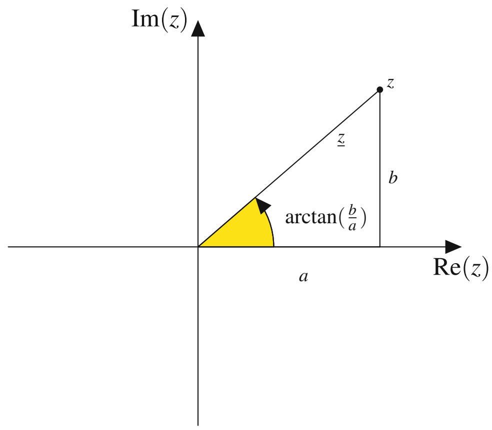


**Abb. 3.8** Komplexe Zahl im ersten Quadranten

- Im ersten Quadranten: Hier ist $\frac{b}{a} > 0$, und der gesuchte Winkel ist $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) > 0$. Es ergeben sich Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ (Abb. 3.8).
- Im zweiten Quadranten: Hier ist $\frac{b}{a} < 0$ und damit $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) < 0$. Der gesuchte Winkel ist $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$. Es ergeben sich Winkel zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ (Abb. 3.9).
- Im dritten Quadranten: Hier ist $\frac{b}{a} > 0$ und damit $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) > 0$. Der gesuchte Winkel ist $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$. Es ergeben sich Winkel zwischen $\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$. Wählt man $-\pi < \varphi \leq \pi$, so ist $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$ (Abb. 3.10).
- Im vierten Quadranten: Hier ist $\frac{b}{a} < 0$ und damit $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) < 0$. Der gesuchte Winkel ist $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$ oder, wenn man ihn negativ angibt, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Es ergeben sich, je nach Betrachtungsweise, Winkel zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und $2\pi$ oder zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ (Abb. 3.11).

Für die Umrechnung zwischen der kartesischen Form und der Polarform ergeben sich also die folgenden Formeln:

1. **Umrechnung trigonometrisch → kartesisch:** Die komplexe Zahl $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ ist gleich $z = a + b\mathrm{i}$ mit

$$a = r \cdot \cos(\varphi),$$
$$b = r \cdot \sin(\varphi).$$

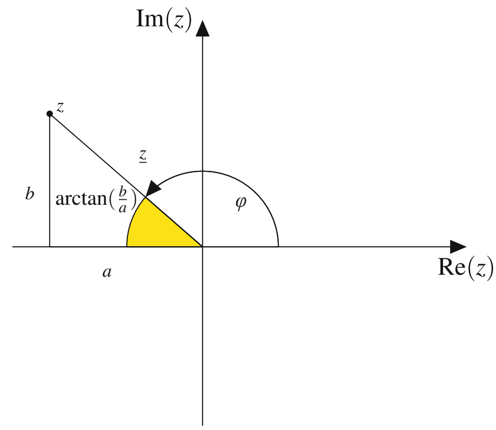


**Abb. 3.9** Komplexe Zahl im zweiten Quadranten

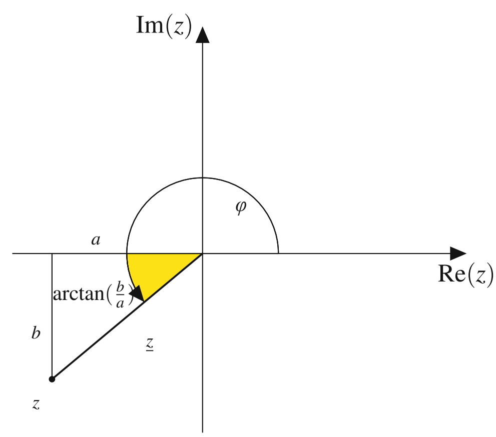


**Abb. 3.10** Komplexe Zahl im dritten Quadranten

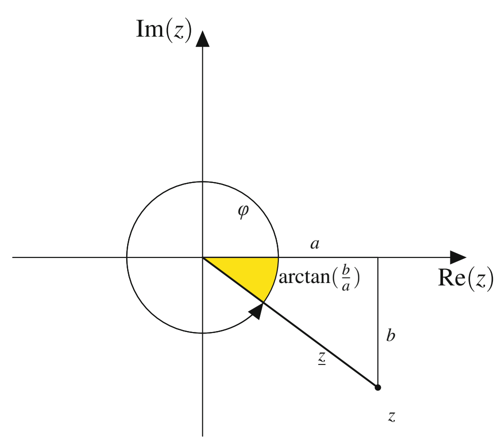


**Abb. 3.11** Komplexe Zahl im vierten Quadranten

2. **Umrechnung kartesisch → trigonometrisch:** Die komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ist gleich $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Teil I

Bei der Bestimmung des Winkels $\varphi$ muss unterschieden werden, in welchem Quadranten die komplexe Zahl liegt (Abb. 3.8 bis 3.11):
Wir diskutieren zunächst den Fall $0 \le \varphi < 2\pi$:

- Falls $a = 0$ ist, liegt $z = bi$ auf der imaginären Achse. Für $b = 0$ ist $r = 0$ und $\varphi$ wird nicht benötigt, bei $b > 0$ gilt $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für $b < 0$ ist $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.
- Falls $b = 0$ ist, liegt $z = a$ auf der reellen Achse. Bei $a > 0$ ist $\varphi = 0$, und für $a < 0$ ist $\varphi = \pi$.

Die Lage von $z = a + bi$ bestimmt den Winkel:
Erster Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Zweiter und Dritter Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi.$$

Vierter Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi.$$

Wählt man $-\pi < \varphi \le \pi$, so gilt:

- $a = 0$: Für $b > 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und für $b < 0$ ist $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
- $b = 0$: Für $a > 0$ ist $\varphi = 0$ und für $a < 0$ ist $\varphi = \pi$.

Die Lage von $z = a + bi$ bestimmt den Winkel:
Erster Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Zweiter Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi.$$

Dritter Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi.$$

Vierter Quadrant:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Komplexe Zahlen in trigonometrischer Darstellung sind *gleich*, wenn Betrag $r$ und Winkel $\varphi$ übereinstimmen, bzw. wenn die Differenz der Winkel ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$ ist.

**Beispiel: Polarform komplexer Zahlen**

Stellen Sie die komplexen Zahlen jeweils in Polarform dar.

1. $z = -3 + 4\mathrm{i}$: Der Betrag von $z$ ist $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Die Zahl liegt im zweiten Quadranten, daher ist das Argument

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi = 2.214.$$

Es ist also

$$z = -3 + 4\mathrm{i} = 5\left(\cos(2.214) + \mathrm{i}\sin(2.214)\right).$$

2. $z = \mathrm{i}$: Der Betrag von $z$ ist $|z| = 1$. Für die Berechnung des Arguments ergibt sich nach Formel (3.1) eine Division durch 0, da der Realteil der rein imaginären Zahl i eben 0 ist. In diesem Fall liest man aus der Darstellung der Zahl in der Gaußschen Zahlenebene ab, dass das Argument $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, und erhält $z = \mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. $z = 1 + \mathrm{i}$: Man berechnet $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ oder überlegt sich, dass $z$ in der Gaußschen Zahlenebene im ersten Quadraten auf der Winkelhalbierenden liegt, und erhält so dasselbe Ergebnis.
4. $z = -2$: Der Zeiger zeigt in Richtung der negativen Realteilachse. Der Betrag ist $+2$, der Winkel ist $\pi$. ◄

In manchen Fällen, insbesondere wenn beim Anwenden der Formel für den Winkel eine Division durch 0 auftritt, ist es einfacher und schneller, das Argument aus der Darstellung der Zahl in der Gaußschen Zahlenebene direkt abzulesen.

Für die trigonometrische Darstellung gelten die Additionstheoreme von Sinus und Kosinus. Daraus lassen sich Formeln für die Multiplikation und Division komplexer Zahlen in der Polarform herleiten.

Möchte man die zwei komplexen Zahlen

$$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)) \quad \text{und} \quad z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2))$$

multiplizieren, so erhält man unter Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 \{(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \\ &\quad + \mathrm{i}(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1))\} \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}. \end{aligned}$$

Diese neue komplexe Zahl hat den Betrag $r_1 r_2$ und den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$. Komplexe Zahlen werden also multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

### Multiplikation und Division wird in Polarform einfach

Eine ähnliche Herleitung ergibt eine Formel für die Division in der Polarform. Da das Potenzieren ein wiederholtes Multiplizieren ist, lässt sich auch dies in Polarform sehr einfach durchführen. Für Addition und Subtraktion dagegen ist die Polarform nicht geeignet.

**Multiplikation, Division und Potenzieren in Polarform**

Für die komplexen Zahlen $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1))$, $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2))$ in trigonometrischer Darstellung gilt:

- **Multiplikation:**

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

  Komplexe Zahlen in der Polarform werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.
- **Division:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0$$

  Komplexe Zahlen in der Polarform werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert.
- **Potenzieren:**

$$z_1^n = r_1^n(\cos(n\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(n\varphi_1))$$

  Eine komplexe Zahl wird mit $n \in \mathbb{N}$ potenziert, indem man ihren Betrag mit $n$ potenziert und ihren Winkel mit $n$ multipliziert.

Die Polarform erlaubt eine geometrische Interpretation von Multiplikation und Division komplexer Zahlen als **Drehstreckung**.

**Beispiel**

Multiplizieren Sie $z_1 = -1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ einmal in der trigonometrischen Darstellung und einmal in der kartesischen Darstellung und stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Umrechnen in die trigonometrische Darstellung:

$$z_1 = \sqrt{5}(\cos(2.03) + \mathrm{i}\sin(2.03)),$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Damit ist

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{10}(\cos(2.82) + \mathrm{i}\sin(2.82)) = -3 + \mathrm{i}.$$

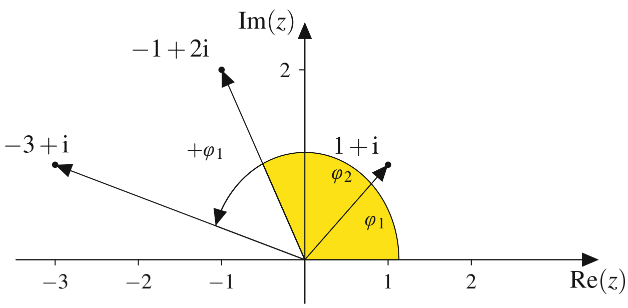


**Abb. 3.12** Die trigonometrische bzw. Polardarstellung komplexer Zahlen ermöglicht eine geometrische Interpretation der Multiplikation. Die Multiplikation mit der komplexen Zahl $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ mit Betrag $\sqrt{2}$ und Winkel $\varphi_1 = 45°$ dreht den Zeiger der Zahl $z_2$ um $\varphi_1 = 45°$ weiter und verlängert den Zeiger um den Faktor $\sqrt{2}$

In der kartesischen Darstellung erhält man dasselbe Ergebnis:

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i}) = -3 + \mathrm{i}.$$

Die Multiplikation bewirkt ein Weiterdrehen des Zeigers $\underline{z_1} = -1 + 2\mathrm{i}$ um $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und eine Streckung um den Faktor $\sqrt{2}$ (Abb. 3.12). ◀

## 3.4 Die Exponentialform komplexer Zahlen

Legt man die komplexen Zahlen zugrunde, gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus.

**Euler-Formel**

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt die **Euler-Formel**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi).$$

Zum Beweis der Euler-Formel benötigt man Kenntnisse über Reihen. Wir zeigen ihre Gültigkeit in Abschn. 4.8.

### Mit der Euler-Formel erhält man die Exponentialform komplexer Zahlen

Mit der Euler-Formel kann man komplexe Zahlen in der Polarform kürzer schreiben.

Teil I

**Exponentialform komplexer Zahlen**

Die komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ mit dem Betrag $r$ und dem Winkel $\varphi$ im Bogenmaß lautet in der Exponentialform dargestellt

$$z = a + b\mathrm{i} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

**Beispiel**

Für die Zahlen aus dem Beispiel „Polarform komplexer Zahlen" (Abschn. 3.3) geben wir die Exponentialform an:

1. $z = -3+4\mathrm{i}$: Es ist $r = 5$ und $\varphi = 2.214$. Damit lautet die Exponentialform $z = 5\mathrm{e}^{2.214\mathrm{i}}$.
2. $z = \mathrm{i}$: Der Betrag von $z$ ist $|z| = 1$, und der Winkel ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Insgesamt ist $z = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.
3. $z = 1 + \mathrm{i}$: Hier ist $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Insgesamt ist $z = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.
4. $z = -2$: Der Betrag ist $+2$, der Winkel ist $\pi$. Also ist $z = -2 = 2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$. ◀

Eine Reihe von oft benötigten Exponentialdarstellungen kann man über die geometrische Anschauung leicht in die kartesische Darstellung bringen:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^0 = 1,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} &= \mathrm{i},\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} &= -1,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

## In Exponentialform helfen die Potenzgesetze beim Rechnen mit komplexen Zahlen

Mithilfe der trigonometrischen Darstellung haben Multiplikation, Division und Potenzieren komplexer Zahlen eine anschauliche Interpretation bekommen. Beispielsweise werden komplexe Zahlen multipliziert, indem man die Beträge der beteiligten Faktoren multipliziert und die Winkel addiert. In Exponentialdarstellung heißt dies, dass sich für die komplexen Zahlen $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ als Produkt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

ergibt.

Es gelten die aus der reellen Analysis bekannten Potenzgesetze

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

sowie

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

**Rechnen in Exponentialdarstellung**

Für die komplexen Zahlen $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$, $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ in Exponentialdarstellung gilt:

- **Multiplikation:**

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

- **Division:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}, \qquad z_2 \neq 0$$

- **Potenzieren:**

$$z^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi}$$

Die Potenzgesetze gelten auch für imaginäre Exponenten.

**Beispiel**

1. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ und $z_2 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}},\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\\ z_1^5 &= \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right)^5 = \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}},\\ z_2^3 &= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

2. Für $z = 2 + 2\mathrm{i} = \sqrt{8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ erhalten wir

$$z^{12} = (\sqrt{8})^{12} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 12\cdot\frac{\pi}{4}} = 8^6 \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3\pi}}_{=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1} = -8^6.$$ ◀

## Im Komplexen gibt es *n* *n*-te Wurzeln einer Zahl

Die Frage nach der Lösung der Gleichung

$$z^n = a + b\mathrm{i}$$

führt auf den Begriff der komplexen Wurzel.

**Definition**

Es sei $w \in \mathbb{C}$. Die Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt ***n*-te Wurzel** von $w$, wenn

$$z^n = w$$

gilt. Man schreibt $z = \sqrt[n]{w}$.

Am Beispiel der Gleichung

$$z^3 = w \text{ mit } w = \frac{8}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{8}{\sqrt{2}}$$

zeigen wir exemplarisch die Vorgehensweise bei der Berechnung der $n$-ten komplexen Wurzeln.

1. Man rechnet zweckmäßig mit der Exponentialform:

$$w = \frac{8}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{8}{\sqrt{2}} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}.$$

   Unter Berücksichtigung der $2\pi$-Periodizität von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ gilt

$$w = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_k &= (8)^{\frac{1}{3}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} \qquad (3.2)\\ &= 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

   sind Lösungen von $z^3 = w$, denn es gilt $z_k^3 = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} = w$.
3. Für $k \in \mathbb{Z}$ erhält man mit $z_k$ aus (3.2) drei verschiedene komplexe Zahlen, nämlich

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{12})},\\ z_1 &= 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{3}{4}\pi)},\\ z_2 &= 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{17}{12}\pi)}. \end{aligned}$$

   Für $k = 3$ addiert man im Argument der e-Funktion die Zahl $2\pi$ und erhält wieder $z_0$. Entsprechend folgt $z_0 = z_3 = z_6 = z_9 = \ldots$ sowie $z_1 = z_4 = z_7 = \ldots$ und $z_2 = z_5 = z_8 = \ldots$, d. h., wir haben tatsächlich nur drei verschiedene Lösungen $z_0, z_1, z_2$ der Gleichung $z^3 = w$. Die Lösungen liegen auf einem Kreis vom Radius 2 um den Ursprung. Die Punkte $z_0, z_1, z_2$ markieren ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 3.13).

**Potenzieren und Radizieren in $\mathbb{C}$**

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Die $n$-te Potenz von $z = a + \mathrm{i} \cdot b = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ergibt sich zu

$$z^n = |z|^n \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot n\varphi}.$$

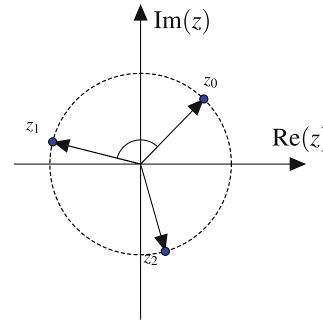


**Abb. 3.13** Die dritten Wurzeln einer komplexen Zahl $z_0$ bilden ein gleichseitiges Dreieck

- Für jede komplexe Zahl $w = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $r \neq 0$ hat die Gleichung

$$z^n = w$$

  genau $n$ verschiedene Lösungen:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{\varphi}{n}+2\pi\cdot\frac{k}{n})}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  Die $n$-ten Wurzeln von $w$ liegen auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Gaußschen Ebene und bilden ein regelmäßiges $n$-Eck.

## Mit Beträgen komplexer Zahlen rechnet man wie im Reellen

Die komplexen Zahlen sind nicht angeordnet, d. h., Ausdrücke wie $z_1 > z_2$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ machen keinen Sinn. Rechnet man mit Beträgen komplexer Zahlen, so gelten die von den reellen Zahlen bekannten Rechenregeln.

**Rechenregeln für komplexe Beträge**

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad (3.3)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \qquad (3.4)$$

Gl. (3.4) ist die **Dreiecksungleichung**.

Die Gültigkeit von (3.3) folgt leicht aus der Exponentialdarstellung komplexer Zahlen.

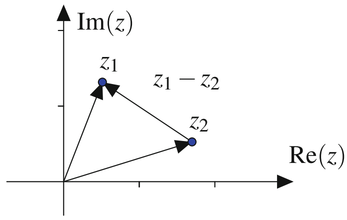


**Abb. 3.14** Die zweite Dreiecksungleichung lautet $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

Durch Ersetzen von $z_1$ durch $z_1 - z_2$ folgt aus (3.4) sofort die zweite Dreiecksungleichung:

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Ferner gilt die **umgekehrte Dreiecksungleichung**:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||\,.$$

Die Dreiecksungleichungen lassen sich geometrisch veranschaulichen: Eine Dreiecksseite ist nie länger als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten; eine Dreiecksseite ist länger als die Differenz der beiden anderen Dreiecksseiten (Abb. 3.14).

## Was im Reellen die Intervalle, sind im Komplexen die Kreise

Sei $z_0$ eine feste komplexe Zahl. Dann beschreibt die Menge

$$k_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\} \quad \text{mit} \quad R > 0$$

den **Kreis** (Kreislinie) um $z_0$ mit Radius $R$. Die Menge

$$K_R(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < R\}$$

beschreibt das **Innere** dieses Kreises (Abb. 3.15).

Ein **Kreisring** mit Mittelpunkt $z_0$ und Radien $0 < R_1 < R_2$ ist erklärt durch

$$K_{R_1,R_2}(z_0) := \{z \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}\,,$$

wobei die Kreislinien des inneren Kreises mit Radius $R_1$ und des äußeren Kreises mit Radius $R_2$ nicht zur Menge gehören.

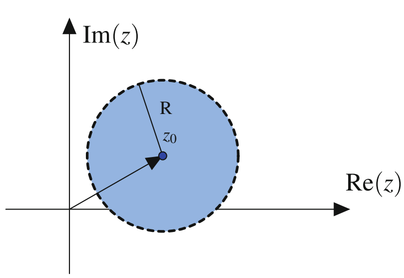


**Abb. 3.15** Die Menge $K_R(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < R\}$ beschreibt den Kreis mit Radius $R$ um $z_0$. Die Kreislinie gehört nicht zur Menge

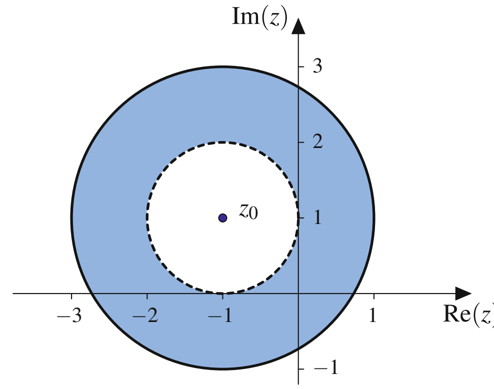


**Abb. 3.16** Die Menge $M = K_{1,2}(z_0) := \{z \mid 1 < |z - z_0| \leq 2\}$ mit $z_0 = -1 + \mathrm{i}$ beschreibt den Kreisring mit Mittelpunkt $z_0$, Innenkreisradius $R_1 = 1$ und Außenkreisradius $R_2 = 2$. Die innere Kreislinie gehört nicht zu $K_{1,2}$, die äußere Kreislinie gehört zur Menge dazu

**Beispiel**

1. Welches Gebiet in $\mathbb{C}$ wird beschrieben durch

   $$M := \{z \mid 1 < |z + 1 - \mathrm{i}| \leq 2\}\,?$$

   Mit $z_0 := -1 + \mathrm{i}$ gilt $1 < |z - z_0| \leq 2$, d. h., die Menge beschreibt einen Kreisring mit Innenradius 1 und Außenradius 2. Die Innenkreislinie gehört nicht zur Menge, der äußere Kreislinie gehört zu $M$ (Abb. 3.16).
2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt

   $$|z - 2\mathrm{i}| < |z|?$$

   Mit $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ folgt:

   $$\begin{aligned} |x + \mathrm{i} \cdot (y-2)| &< |x + \mathrm{i} \cdot y| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} &< \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 &< x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow 1 &< y. \end{aligned}$$

   Die Halbebene $\mathrm{Im}(z) > 1$, d. h. die Menge $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y > 1$, ist Lösung der Gleichung. ◀

## 3.5 Schwingungen, Zeiger und komplexe Zahlen

Schwingungen spielen in den Ingenieurwissenschaften eine große Rolle, z. B. in der Mechanik oder als sinusförmige Ströme und Spannungen in der Wechselstromtechnik.

Beispielsweise ist man in der Elektrotechnik daran interessiert, Schaltungen mit einer Wechselspannungsquelle zu beschreiben.

Meistens handelt es sich um eine sinusförmige Wechselspannung. Ein typischer Spannungsverlauf hat dann die Form

$$u(t) = \widehat{u}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

mit der Amplitude $\widehat{u}$, der Kreisfrequenz $\omega$ und dem (Null-)-Phasenwinkel $\varphi$. Diese Form nennt man **Darstellung im Zeitbereich**.

Diese Zeiger kann man in der Ebene interpretieren. Man kann sie grafisch addieren und drehen. Das Addieren entspricht der Überlagerung von zwei Schwingungen. Für diese Zeiger ist aber keine Multiplikation oder Division definiert. Interpretiert man sie als **komplexe Zeiger** und damit als komplexe Zahlen, hat man zusätzliche mathematische Hilfsmittel zur Verfügung. Insbesondere kann man dann die Drehung solcher Zeiger in Form einer Multiplikation komplexer Zahlen ausdrücken.

## In der Wechselstromtechnik arbeitet man mit komplexen Zeigern

Um Wechselstromkreise zu analysieren, ist es notwendig, diese Schwingungsformen zu addieren, zu subtrahieren, zu multiplizieren und zu dividieren. Im Zeitbereich ist das mithilfe von Additionstheoremen möglich, aber sehr aufwendig. Eine Alternative ist die Beschreibung mithilfe von **Zeigern**.

Das Vorgehen bei der Beschreibung von Schwingungen durch Zeiger ist in Abb. 3.17 dargestellt.

Wir betrachten zunächst $t = 0$. Der Wert der Funktion ist $u(0) = \widehat{u}\,\sin(\varphi)$. Diesen Wert kann man mithilfe eines um den Winkel $\varphi$ gegenüber der positiven reellen Achse gedrehten Zeigers darstellen. Die Projektion dieses Zeigers auf die $y$-Achse ergibt den Wert der Funktion zur Zeit $t = 0$.

Für einen beliebigen Zeitpunkt mit $t > 0$ muss der Zeiger um den Winkel $\omega t$ weitergedreht werden. Wieder ergibt die Projektion dieses Zeigers auf die $y$-Achse den aktuellen Wert der Spannung. Die Zeitabhängigkeit des Spannungsverlaufs wird also durch Drehen des Zeigers im Gegenuhrzeigersinn abgebildet.

Insgesamt wird die Sinusgröße durch einen rotierenden Zeiger dargestellt. Die Länge des Zeigers und damit der Radius des Kreises repräsentiert die Amplitude der Schwingung. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ ist gleich der Kreisfrequenz $2\pi f$ der betrachteten Sinusgröße. Der Phasenwinkel der Schwingung ergibt sich aus der Zeigerstellung bei $t = 0$.

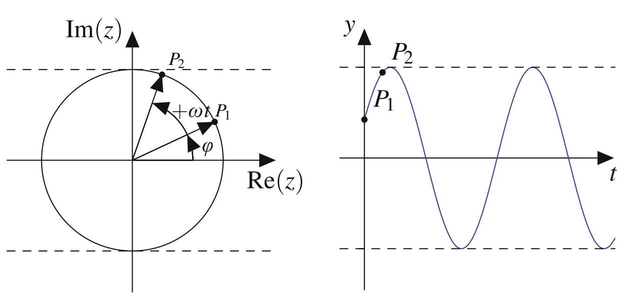


**Abb. 3.17** Man kann jeden Punkt der Schwingung im Zeitbereich auf einen Kreis mit dem Radius $\hat{u}$ projizieren. Der Punkt $P_1$ beschreibt den Wert der Funktion zur Zeit 0 s, der Punkt $P_2$ den Wert zur Zeit $t$. Das Fortschreiten der Zeit entspricht einem Drehen des Zeigers

## Zeiger und komplexe Amplituden beschreiben Phasenverschiebungen bei Schwingungen

Zur Zeit $t = 0$ hat der Zeiger, der die Sinusgröße repräsentiert, die Länge $\widehat{u}$ und den Winkel $\varphi$. In komplexer Darstellung in Exponentialform ist

$$\underline{u}(0) = \widehat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Zur Zeit $t$ ist die Länge des Zeigers ebenfalls $\widehat{u}$, der Winkel aber $\omega t + \varphi$. In komplexer Darstellung in Exponentialform ist also

$$\underline{u}(t) = \widehat{u}\,\mathrm{e}^{(\omega t+\varphi)\mathrm{i}} = \widehat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

**Komplexe Zeiger**

Die reelle Schwingung

$$u(t) = \widehat{u}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

lässt sich mithilfe der komplexen Zeiger

$$\underline{u}(t) = \widehat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} = \widehat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

beschreiben.

Der Ausdruck $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ beschreibt die Zeitabhängigkeit der Schwingung und wird **Zeitfaktor** oder **Drehoperator** genannt, während $\underline{U} = \underline{u}(0) = \widehat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ alle Informationen über die Amplitude und Phasenverschiebung der reellen Schwingung enthält. $\underline{U}$ heißt **komplexe Amplitude** der Schwingung.

Die reelle Schwingung erhält man aus der komplexen Schwingung, indem man deren Imaginärteil nimmt:

$$\begin{aligned}u(t) &= \mathrm{Im}\left(\underline{u}(t)\right) = \mathrm{Im}\left(\widehat{u}\left(\cos(\omega t+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\omega t+\varphi)\right)\right)\\ &= \widehat{u}\,\sin(\omega t+\varphi).\end{aligned}$$

Bei dem hier beschriebenen Vorgehen ist der Radius des Kreises gerade die reelle Amplitude der Schwingung. Dies ist eine Darstellung durch **Scheitelwertzeiger**. In der Elektrotechnik ist ebenfalls eine Darstellung durch **Effektivwertzeiger** üblich; dann ist der Radius des Kreises um den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ kleiner.

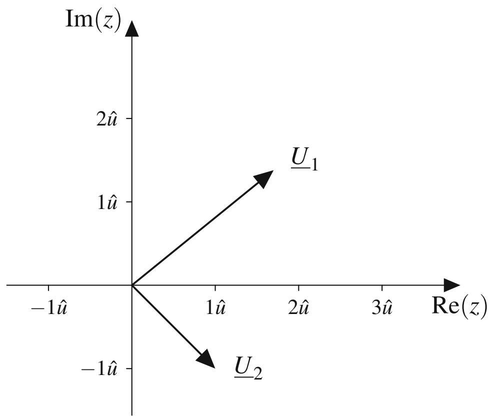


**Abb. 3.18** Zwei komplexe Zeiger

**Beispiel**

Stellen Sie die Schwingungen $u_1(t) = \sqrt{3}\hat{u}\sin(2t + \frac{\pi}{3})$ und $u_2(t) = \sqrt{2}\hat{u}\sin(2t - \frac{\pi}{4})$ durch komplexe Zeiger dar und skizzieren Sie jeweils die komplexe Amplitude.

Die Schwingung $u_1(t)$ hat die Amplitude $\sqrt{3}\hat{u}$, die Kreisfrequenz $\omega = 2$ und den Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Damit ist

$$\underline{u}_1(t) = \sqrt{3}\hat{u}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}.$$

Die komplexe Amplitude ist

$$\underline{U}_1 = \sqrt{3}\hat{u}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\hat{u}.$$

Die Schwingung $u_2(t)$ hat die Amplitude $\sqrt{2}\hat{u}$, die Kreisfrequenz $\omega = 2$ und den Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Damit ist

$$\underline{u}_2(t) = \sqrt{2}\hat{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}.$$

Die komplexe Amplitude ist

$$\underline{U}_2 = \sqrt{2}\hat{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = (1 - \mathrm{i})\,\hat{u}.$$

Die Umrechnung in die kartesische Darstellung erleichtert die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene (Abb. 3.18). ◀

Wir fassen zusammen:

**Beschreibung von Schwingungen mit komplexen Zahlen**

Schwingungen kann man auf verschiedene Arten beschreiben: Als (Sinus-)Schwingung im Zeitbereich, als Zeiger in der Ebene oder als komplexe Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene. Je nach Art der Beschreibung hat man unterschiedliche mathematische Hilfsmittel, um mit den Schwingungen zu rechnen.

## 3.6 Polynome und algebraische Gleichungen

Wir betrachten nun die Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades $n \in \mathbb{N}$ im Komplexen. Diese Aufgabe kann als Nullstellenproblem für ein komplexes Polynom vom Grad $n$ formuliert werden.

**Definition**

Ein Ausdruck der Form

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ wird als **(komplexes) Polynom $n$-ten Grades** bezeichnet.

Die Zahl $z_0$ heißt **Nullstelle** von $P_n(z)$, falls gilt:

$$P_n(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, Aussagen über die Anzahl und Art der Nullstellen zu machen. Die Grundlage dafür ist der Fundamentalsatz der Algebra.

**Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes Polynom $n$-ten Grades $(n \geq 1)$

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Der Beweis ist schwierig und wird deshalb übergangen.

### Ein komplexes Polynom ist ein Produkt aus lauter Linearfaktoren

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt das Polynom

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 1$$

mindestens eine Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C}$.

## Anwendung: Widerstand, Spule und Kondensator

Strom und Spannung im Wechselstromkreis haben dieselbe Frequenz, aber sie haben unterschiedliche Amplituden und sind gegeneinander phasenverschoben. Theoretische und experimentelle Ergebnisse in der Wechselstromtechnik zeigen, welche Phasenverschiebung ein Bauteil verursacht. Wie wir gesehen haben, kann man Schwingungen mithilfe komplexer Zeiger darstellen (Abb. 3.17). Bei phasenverschobenen Schwingungen gehen die zugehörigen komplexen Zeiger durch Multiplikation mit einer komplexen Größe auseinander hervor.

Das Hauptinteresse liegt darin zu beschreiben, wie sich das Verhältnis von Spannung zu Strom, also die Impedanz, und die Phasen der Schwingungen zueinander verhalten. Die Zeiger für Strom und Spannung werden dafür zu einem festgehaltenen Zeitpunkt betrachtet. Man wählt hierfür entweder den Zeitpunkt $t = 0$ oder einen anderen Zeitpunkt, bei dem ein beteiligter Zeiger, der sog. Referenzzeiger, gerade auf der reellen Achse liegt (Abb. 3.19). Dieses Vorgehen ist möglich und korrekt, weil die Länge der Zeiger und ihre Phasenverschiebung gegeneinander zu allen Zeitpunkten gleich bleiben.

Man kann zeigen, dass an einem ohmschem Widerstand Strom und Spannung in Phase sind, wenn eine Wechselspannung angelegt wird. Das Verhältnis der beiden Amplituden ist gleich dem Widerstand $R$. Das bedeutet, dass die zur Spannung $u$ und zum Strom $i$ gehörenden Zeiger dasselbe Argument haben. Es gilt $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ mit $\underline{Z} = R$ (Abb. 3.19).

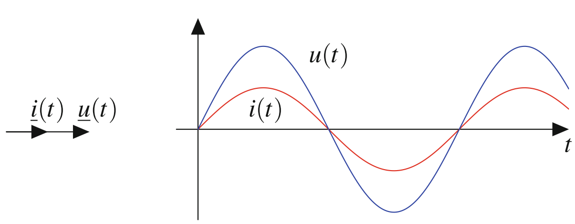


**Abb. 3.19** Strom (*rot*) und Spannung (*blau*) am Widerstand (*links*) und die dazugehörigen Zeiger (*rechts*). Strom und Spannung sind in Phase

Für eine Induktivität kann gezeigt werden, dass die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ vorauseilt. Damit ist der Phasenwinkel der Impedanz $\frac{\pi}{2}$. Wir wissen ebenfalls, dass der Betrag der Impedanz $\omega L$ ist. Damit ergibt sich aus der Exponentialdarstellung

$$\underline{Z} = \omega L \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \omega L \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \mathrm{i}\omega L$$

in kartesischer Darstellung. Die kartesische Darstellung ist erforderlich, wenn Zeiger addiert und subtrahiert werden müssen. Es gilt $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ mit $\underline{Z} = \mathrm{i}\omega L$ (Abb. 3.20).

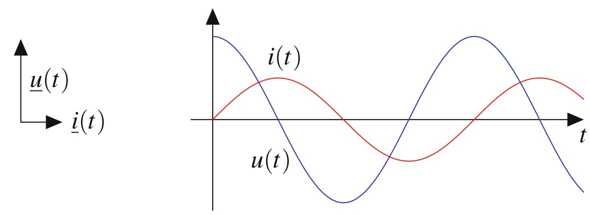


**Abb. 3.20** Strom (*rot*) und Spannung (*blau*) an der Spule (*links*) und die dazugehörigen Zeiger (*rechts*). Die Spannung eilt dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus

Für einen Kondensator kann gezeigt werden, dass die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ nacheilt und die Größe der Impedanz $\frac{1}{\omega C}$ ist. Dann ergibt sich aus der Exponentialdarstellung

$$\underline{Z} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega C}$$

in kartesischer Darstellung. Oft wird der letzte Ausdruck auch in der Form $\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}$ geschrieben, obwohl das keine kartesische Form ist. Es gilt $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ mit $\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}$ (Abb. 3.21).

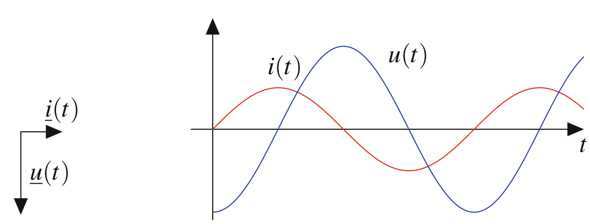


**Abb. 3.21** Strom (*rot*) und Spannung (*blau*) am Kondensator (*links*) und die dazugehörigen Zeiger (*rechts*). Der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus

Teil I

Von $P_n(z)$ kann der Linearfaktor $(z - z_1)$ ohne Rest abdividiert werden:

$$P_n(z) = P_{n-1}(z) \cdot (z - z_1).$$

$P_{n-1}(z)$ ist ein Polynom vom Grad $n-1$. Ist der Grad $n-1$ von $P_{n-1}(z)$ größer als 0, so kann man den Fundamentalsatz der Algebra erneut anwenden: Es existiert eine Nullstelle $z_2 \in \mathbb{C}$ von $P_{n-1}(z)$, sodass

$$P_{n-1}(z) = P_{n-2}(z) \cdot (z - z_2)$$

mit $\operatorname{Grad}(P_{n-2}) = n-2$ gilt. Für $P_n(z)$ folgt dann

$$P_n(z) = P_{n-2}(z) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2).$$

Durch schrittweises Abdividieren aller $n$ Nullstellen von $P_n(z)$ folgt:

**Linearfaktorzerlegung von Polynomen**

Ein Polynom $P_n(z)$ vom Grad $n$ hat $n$ komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, die möglicherweise zusammenfallen. Es gilt die **Linearfaktorzerlegung**

$$P_n(z) = a_n(z - z_n) \cdot (z - z_{n-1}) \cdot \cdots \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1).$$

## Die *p*-*q*-Formel gilt auch für quadratische Gleichungen im Komplexen

Um eine quadratische Gleichung zu lösen, gewinnt man durch quadratische Ergänzung eine Gleichung der Form $z^2 = w$ mit Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{w}$.

**Beispiel**

Wir lösen die Gleichung

$$z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 + \mathrm{i} = \frac{9}{4}$$

$$\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} - \mathrm{i} = \frac{5}{4} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\arctan(\frac{4}{3})+\pi\right)},$$

und die Substitution $w = z - \frac{3}{2}$ liefert die Gleichung

$$w^2 = \frac{5}{4} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\arctan(\frac{4}{3})+\pi\right)}$$

mit den beiden Lösungen

$$w_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\arctan(\frac{4}{3})+\pi}{2}\right)},$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\arctan(\frac{4}{3})+\pi}{2}+\pi\right)} = -w_1.$$

Die kartesische Darstellung

$$w_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\cos\left(\frac{\arctan(\frac{4}{3})+\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arctan(\frac{4}{3})+\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i},$$

$$w_2 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}$$

liefert die beiden Lösungen

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}, \quad z_2 = 2 - \mathrm{i}.$$

◄

Allgemein gilt: Für die quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$ erhalten wir mit $z_0 = \frac{p}{2}$ durch quadratische Ergänzung

$$z^2 + 2z_0 z + z_0^2 + q - z_0^2 = (z + z_0)^2 + q - z_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z + z_0 = \pm\sqrt{z_0^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow z = -z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

d. h., die $p$-$q$-Formel für quadratische Gleichungen gilt auch für $p, q \in \mathbb{C}$.

## Sind die Koeffizienten reell, treten komplexe Nullstellen in konjugiert komplexen Paaren auf

Wenn ein komplexes Polynom nun nur reelle Koeffizienten hat und wir aber nach wie vor an komplexen Nullstellen interessiert sind, so ergibt sich aus dem Fundamentalsatz der Algebra eine nützliche Eigenschaft der Nullstellen.

Ist nämlich $z_0$ eine Nullstelle eines Polynom $n$-ten Grades ($n \geq 1$)

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit *reellen* Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$, dann gilt

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Wir können auf beide Seiten der Gleichung komplexe Konjugation anwenden:

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} = 0$$

Weil für die komplexe Konjugation $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ gilt, folgt weiter:

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0$$

und mit $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ gilt auch

$$\overline{a}_n \overline{z}_0^n + \overline{a}_{n-1} \overline{z}_0^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 \overline{z}_0 + \overline{a}_0 = 0.$$

Weil alle Koeffizienten $a_k$ reell sind, erhalten wir

$$a_n \overline{z}_0^n + a_{n-1} \overline{z}_0^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = 0,$$

also ist auch $\overline{z}_0$ eine Nullstelle.

**Polynome mit reellen Koeffizienten**

Für das Polynom $n$-ten Grades ($n \geq 1$)

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ gilt: Ist $z_0 = x_0 + \mathrm{i} \cdot y_0$ Nullstelle von $P_n(z)$ so ist auch $\overline{z}_0 = x_0 - \mathrm{i} \cdot y_0$ Nullstelle von $P_n(z)$.

Also gilt: Sind die Koeffizienten von $P_n(z)$ *reell*, so sind die Nullstellen entweder reell, oder sie treten paarweise komplex konjugiert auf, d. h., mit $z_k = x_k + \mathrm{i} \cdot y_k$, $y_k \neq 0$, ist auch $\overline{z}_k = x_k - \mathrm{i} \cdot y_k$ Nullstelle von $P_n(z)$.

Diese Eigenschaft erkennen wir in den folgenden Beispielen.

**Beispiel**

1. Bestimmen Sie alle Nullstellen von

$$P_3(z) = z^3 + 1.$$

Es gilt $P_3(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1$. Wir bestimmen die Lösung durch komplexes Wurzelziehen. Mit der Exponentialdarstellung der rechten Seite gilt

$$z^3 = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow z_k = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\mathrm{i}\cdot(\pi+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Wir erhalten drei Lösungen:

$$\begin{aligned} z_0 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}, \\ z_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi} = -1, \\ z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} = \overline{z_0}. \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die Lösung von

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = -8.$$

Die binomische Formel für $n = 3$ liefert zunächst

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = (z+1)^3$$

und wir erhalten

$$(z+1)^3 = -8.$$

Mit der Substitution $w = z + 1$ folgt

$$w^3 = -8.$$

Mit der Exponentialdarstellung der rechten Seite gilt

$$w^3 = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\pi+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow w_k = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\mathrm{i}\cdot(\pi+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Wir erhalten drei Lösungen:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}, \\ w_1 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi} = -2, \\ w_2 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} = \overline{w_0} \end{aligned}$$

Für das Ausgangsproblem folgt:

$$\begin{aligned} z_0 &= w_0 - 1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} - 1, \\ z_1 &= w_1 - 1 = -2 - 1 = -3, \\ z_2 &= w_2 - 1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} - 1. \end{aligned}$$

Auch hier gilt $z_0 = \overline{z_2}$.

3. Bestimmen Sie die Lösung von

$$z^4 = -1 + \mathrm{i}.$$

Es ist $-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3}{4}\pi}$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} z^4 &= \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow z_k &= 2^{1/8} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\cdot\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)} \\ &= \underbrace{2^{1/8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3}{16}\pi}}_{=:z_0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{k}{4}\cdot 2\pi}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Somit erhält man die vier Lösungen

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3}{16}\pi}, \\ z_1 &= 2^{1/8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{3}{16}\pi + \frac{\pi}{2}\right)}, \\ z_2 &= 2^{1/8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{3}{16}\pi + \pi\right)}, \\ z_3 &= 2^{1/8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{3}{16}\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind nicht zueinander konjugiert komplex. ◀

Teil I

## Ein reelles Polynom ist ein Produkt aus Linearfaktoren und aus quadratischen Faktoren

Man kann die beiden Linearfaktoren $(z - z_k)$ und $(z - \overline{z}_k)$ zu dem reell unzerlegbaren (irreduziblen) quadratischen Faktor $((z - x_k)^2 + y_k^2)$ zusammenfassen:

$$(z - x_k - \mathrm{i} \cdot y_k) \cdot (z - x_k + \mathrm{i} \cdot y_k) = ((z - x_k)^2 + y_k^2).$$

Damit entsteht ein quadratischer Ausdruck mit reellen Koeffizienten.

**Faktorzerlegung reeller Polynome**

Ein Polynom $P_n(z)$ mit reellen Koeffizienten kann stets in ein Produkt irreduzibler reeller Faktoren höchstens zweiten Grades zerlegt werden.

**Beispiel**

1. Das kubische Polynom

$$P_3(z) = z^3 + z - 10$$

hat die reelle Nullstelle $z_1 = 2$. Wie lauten die restlichen Nullstellen?
Abspalten des Linearfaktors $(z-2)$ durch Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l} z^3 \qquad\quad + z - 10 : (z-2) = z^2 + 2z + 5. \\ \underline{-(z^3 - 2z^2)} \\ \quad 2z^2 \quad + z - 10 \\ \quad \underline{-(2z^2 - 4z)} \\ \qquad\qquad 5z - 10 \end{array}$$

Mit der $p$-$q$-Formel erhalten wir die Nullstellen von $z^2 + 2z + 5 = 0$ zu

$$z_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2\mathrm{i}.$$

Damit erhalten wir die komplexe Zerlegung in Linearfaktoren:

$$P_3(x) = (z - 2) \cdot (z + 1 - 2\mathrm{i}) \cdot (z + 1 + 2\mathrm{i}).$$

Fassen wir die konjugiert komplexen Nullstellen zu einem quadratischen Faktor zusammen:

$$(z + 1 - 2\mathrm{i}) \cdot (z + 1 + 2\mathrm{i}) = (z + 1)^2 + 4,$$

so erhalten wir die Zerlegung von $P_3(x)$ in irreduzible reelle Faktoren:

$$P_3(x) = (z-2) \cdot ((z+1)^2 + 4) = (z-2) \cdot (z^2 + 2z + 5).$$

2. Das Polynom vierten Grades

$$P_4(z) = z^4 - 2z^2 - 3$$

lässt sich mit der Substitution $w = z^2$ in das quadratische Polynom $w^2 - 2w - 3$ überführen.
Mit der $p$-$q$-Formel erhalten wir

$$w_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} = 1 \pm 2, \text{ d. h. } w_1 = 3, \; w_2 = -1.$$

Weiter folgt

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{w_1} = \pm\sqrt{3} \quad \text{und} \quad z_{3,4} = \pm\sqrt{w_2} = \pm\mathrm{i}.$$

Insgesamt ergibt sich die Zerlegung in komplexe Linearfaktoren:

$$P_4(z) = \left(z - \sqrt{3}\right) \cdot \left(z + \sqrt{3}\right) \cdot (z - \mathrm{i}) \cdot (z + \mathrm{i}).$$

Die Zerlegung von $P_4(x)$ in irreduzible reelle Faktoren lautet

$$P_4(x) = \left(z - \sqrt{3}\right) \cdot \left(z + \sqrt{3}\right) \cdot (z^2 + 1).$$ ◄

# Aufgaben

**3.1** Es sei $z_1 = 2 + \mathrm{i}$, $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$. Berechnen Sie die kartesische Form der folgenden Ausdrücke:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

e) $\dfrac{z_2}{z_1}$

f) $\overline{z_2} \cdot z_1$

g) $z_2 \cdot \overline{z_2}$

**3.2** Lösen Sie die Gleichung und berechnen Sie die kartesische Form der Lösung:

a) $\dfrac{2 + z}{4\mathrm{i}} = 7\mathrm{i}$

b) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\mathrm{i}} = 3$

c) $\dfrac{3z}{4z+2} = 4\mathrm{i}$

d) $z + 2\overline{z} = 25 + 3\mathrm{i}$

**3.3** Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von:

a) $z_1 = \dfrac{4-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

b) $z_2 = (1+\mathrm{i}) \cdot (3-\mathrm{i})$

c) $z_3 = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

d) $z_4 = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{1+\mathrm{i}}$

**3.4**

a) Es sei $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 4\mathrm{i}$ und $z_3 = -7$. Berechnen Sie die Exponentialform von $z_1, z_2$ und $z_3$.
b) Es sei $z_1 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, $z_2 = 5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$. Berechnen Sie

$$z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{z_2}{z_1}, \quad z_1^3, \quad z_2^7.$$

**3.5** Finden Sie $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$, sodass $(x + y\mathrm{i})^2 = 3 + 4\mathrm{i}$ erfüllt ist.

**3.6** Die Admittanz einer Schaltung ist gegeben durch

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{i}\omega L} + \mathrm{i}\omega C.$$

Wie lautet der Imaginärteil von $\underline{Y}$, und für welche Werte von $\omega$ ist $\mathrm{Im}(\underline{Y}) = 0$?

**3.7** Stellen Sie die reelle Schwingung

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{\delta_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

mithilfe der Funktionen $y_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ und $y_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$ dar.

**3.8**

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$z_1 = (1-\mathrm{i})^{12}, \quad z_2 = \frac{\mathrm{i}^5 - 1}{|\mathrm{i} - 1|}.$$

b) Für welche Punkte der Gaußschen Zahlenebene $z = x + \mathrm{i}y$ gilt

$$\mathrm{Im}(z^2) > \mathrm{Im}(z)?$$

**3.9** Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z(c) = \frac{1+\mathrm{i}}{c - \mathrm{i}}$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $z(c)$ reell, für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $z(c)$ rein imaginär?
b) Berechnen Sie die Zahl $(z(0))^{11}$. Geben Sie das Ergebnis in Polarform und in kartesischer Form an.
c) Berechnen Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 = z(0)$.

**3.10**

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z_1 = \frac{1 + \frac{1}{\mathrm{i}}}{1 + \frac{1}{\mathrm{i}^3}}, \quad z_2 = \frac{(1+2\mathrm{i}) \cdot (2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})^2}.$$

b) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^6 - 4z^3 + 8 = 0.$$

Die Angabe der Lösungen in Polardarstellung ist ausreichend.

# Analysis in einer Variablen

# II

Teil II